

Ferenczi Miklós

# A matematika alapjairól



Ferenczi Miklós

# A matematika alapjairól



A mű elektronikus kiadása  
a VEKOP-2.1.1-15-2016-00152 sz. projekt  
keretén belül készült.

© Ferenczi Miklós, Typotex, Budapest, 2020  
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 493 075 4

Szakmai lektor: Sain Ildikó

Kedves Olvasó!  
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!  
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a [www.typotex.hu](http://www.typotex.hu)  
és a [facebook.com/typotexkiado](https://facebook.com/typotexkiado) oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó  
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989  
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók  
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.  
Felelős kiadó: Németh Kinga  
Főszerkesztő: Horváth Balázs  
A kötetet gondozta: Gerner József  
A borítót készítette: Szalay Éva

# Tartalomjegyzék

<b>I. A MATEMATIKA ALAPJAI</b>	<b>13</b>
<b>1. Halmazok, halmazalgebrák</b>	<b>14</b>
1.1. Elemi fogalmak	14
1.2. A halmazműveletekről	18
1.3. Halmazalgebrák	23
<b>2. Állításlogika</b>	<b>27</b>
2.1. Formalizálás	28
2.2. A formális állításnyelv	29
2.3. Igazságértékelés, kapcsolat a halmazalgebrákkal	31
2.4. Állítások modellezése a halmaznyelv közvetítésével	36
2.5. Logikai következmény	39
<b>3. Relációk (igazsághalmazok), függvények, struktúrák</b>	<b>48</b>
3.1. Relációkról, függvényekről – általában	48
3.2. Ekvivalenciarelációk	53
3.3. Rendezési relációk	56
3.4. Struktúrák	63
<b>4. Elsőrendű logika</b>	<b>67</b>
4.1. Formális elsőrendű nyelv	67
4.2. Igazságértékelés (igazságinterpretáció)	69
4.3. Kitekintés a másodrendű logikára	72
4.4. Formalizálás elsőrendű logikában, nevezetes axiómarendszerek	73
4.5. Struktúrák megadásáról, megszorításáról és általánosításáról	79
4.6. Logikai következményfogalom az elsőrendű logikában	81
4.7. Az axiomatikus módszerről, a bizonyításelméletről	85

<b>5. Számosságok, axiomatikus halmazelmélet</b>	88
5.1. Számosságok	88
5.2. Axiomatikus halmazelmélet	98
<b>6. A számfogalomról</b>	103
6.1. Természetes számok, egész számok	104
6.2. Racionális számok	104
6.3. Valós számok	105
6.4. Komplex számok	110
6.5. Nemstandard valós számok	111
<b>7. A matematika néhány fontos eleméről</b>	117
7.1. Alapfogalmak, axiómák	117
7.2. A definíciókról	118
7.3. Következtetések	122
7.4. A bizonyításokról	125

## **II. VÁLOGATOTT, AZ ALAPOKHOZ KAPCSOLÓDÓ FEJEZETEK** **133**

<b>8. Bizonyításelmélet, algoritmuselméleti kitekintéssel</b>	134
8.1. A Hilbert-féle levezetési rendszer. A bizonyításelmélet erejéről	134
8.2. A bizonyításelmélet korlátairól	139
8.3. Analitikus fák	141
8.4. Kitekintés az automatikus tételbizonyításra	155
8.5. Eldönthetőség	156
8.6. Kitekintés az algoritmuselméletre	161
<b>9. Nemstandard analízis</b>	165
9.1. 1 valószínűséggel	165
9.2. Nemstandard valós számok és struktúrájuk	169
9.3. További relációk és függvények kiterjesztései	171
9.4. Az ultrahatvány-konstrukcióról	175
9.5. $\mathcal{R}^*$ szerkezetéről	176
9.6. Általánosítás, alkalmazások	177
<b>10. Valószínűségfogalom, induktív logika</b>	182
10.1. Valószínűség	182
10.2. Induktív következtetés, feltételes valószínűség	184
10.3. Speciális számolási szabályok	188

<b>11. Algebrai logika</b>	192
11.1. A Boole-algebra fogalmáról, példák Boole-algebrákra . . . . .	192
11.2. Néhány absztrakt algebrai fogalomról . . . . .	194
11.3. A Boole-algebra és a logika kapcsolatáról . . . . .	199
11.4. Az elsőrendű logika algebraizációjáról . . . . .	202
11.5. Kitekintés . . . . .	206
<b>12. A mértékelméletről</b>	207
12.1. Mértékek, valószínűségek . . . . .	207
12.2. Mérhető (mértéktranszformációra alkalmas) függvények . . . . .	215
12.3. A Lebesgue-integrál fogalmáról . . . . .	224
<b>III. PÉLDATÁR</b>	<b>231</b>
<b>13. Feladatok</b>	232
13.1. Halmazok, halmazalgebrák . . . . .	232
13.2. Állításlogika . . . . .	236
13.3. Relációk, függvények, struktúrák . . . . .	237
13.4. Elsőrendű logika . . . . .	239
13.5. Számosságok . . . . .	241
13.6. A számfogalomról . . . . .	243
13.7. A matematika elemei . . . . .	244
13.8. Bizonyításelmélet, algoritmuselméleti kitekintés . . . . .	245
13.9. Nemstandard analízis . . . . .	248
13.10. Valószínűség, induktív logika . . . . .	249
13.11. Algebrai logika . . . . .	250
13.12. Mértékelmélet . . . . .	251





# Bevezetés

A tapasztalatok azt mutatják, hogy egy könyv bevezetését igen kevesen olvassák el gondosan – kivételek azok az olvasók, akik viszont kizárólag a bevezetést olvassák el. Ezt a könyvet viszont nem ez utóbbi olvasókörenek szánjuk. Optimista hozzáállással ennek ellenére feltételezzük, hogy a tisztelt Olvasó átfutja ezt a bevezetést, ezért itt előrebocsátunk néhány olyan tudnivalót, amelyek megkönnyítik a könyv kezelését.

Amennyiben az olvasó gyorsan szeretne fogalmat alkotni a könyv taníthatóságáról és feldolgozhatóságáról, akkor azt javasoljuk, hogy először a III. részben található példatárba lapozzon bele. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a „matematika alapjai” elnevezést a „halmazelmélet és matematikai logika” témakörére is szokták használni. A könyv címe azonban *nem* a „halmazelmélet és matematikai logika” szinonimája, mert a témát itt egy átfogóbb értelmezésben fejtjük ki.

Először is leszögezzük, hogy az Olvasó egy *tankönyvet*, tehát nem tudományos könyvet tart a kezében. Felmerülnek ezért a következő kérdések:

1. Kiknek készült ez a tankönyv és milyen céllal?
2. Hány órányi előadás anyagát tartalmazza?
3. Mi különbözteti meg egyéb, hasonló témájú tankönyvektől?
4. Hogyan érdemes feldolgozni a könyvet?

Megkíséreljük megválaszolni ezeket a kérdéseket.

1. *A könyvet a matematika iránt különösen érdeklődő egyetemi hallgatóknak (nem csak matematika szakosoknak), valamint az első éves a matematikus hallgatóknak szánom. Feltételezem a gimnáziumi matematikaanyag alapos ismeretét, de ennél nem többet. A könyv célja az olyan általános matematikai fogalmak egységes tárgyalása, amelyek szinte minden bevezető matematika-előadásban (analízis, algebra, geometria, valószínűségszámítás stb.) felmerülnek, éppen ezért szétszórtnak, esetlegesen – nem egységes megközelítésben. E fogalmak fontossága viszont indokolja egységes tárgyalásu-*

kat. Ez a könyv „törzsanyaga”, az I. rész. Tehát ennek a műnek nem az az elsődleges célja, hogy a matematika filozófiáját tárgyalja, hanem gyakorlati alapot szeretne nyújtani a matematikához (a II. rész már a filozófiai megalapozásba is betekintést enged).

2. *A könyv I. része egy 14 hetes, tehát 1 szemeszteres, heti 2 órás kurzusra van méretezve*, amely előadássorozat címe akár meg is egyezhet a könyv címével. A II. rész egy további, heti 2 órás szemeszter anyagát tartalmazza, és például egy olyan speciális kollégium anyagaként képzelhetjük el, amelyben elmélyíthetjük az I. részben megszerzett tudást.

3. Mivel a könyv tankönyv, igen fontosak a didaktikai szempontok. Más, hasonló tárgyú művekkel összevetve a következőkre hívjuk fel a figyelmet:

a) *Nagy hangsúlyt kapnak a könyvben a feladatok, melyek végigkísérik a tárgyalás egészét.* Megoldott feladatokat PÉLDÁK, valamint Feladatok című szó alatt is találunk (utóbbiaknál a megoldást M betűvel jeleztük). A könyv III. része egy kisebb példatárnak tekinthető. A szükséges elméleti alapon túl az a célunk, hogy szép példákon és feladatokon keresztül világítsunk rá a szükséges fogalmak, tételek jelentőségére.

b) *Fontos fejezete a könyvnek a hetedik fejezet, melynek címe: „A matematika néhány fontos eleméről.”* Itt általánosan – helyenként metaszinten – vizsgáljuk a matematikai definíciókat, bizonyításokat, következtetéseket. Didaktikailag azonban az is elfogadható, ha ezt a fejezetet a többi fejezettel párhuzamosan tárgyaljuk. A fejezet tehát többféle oktatási elképzelést tesz lehetővé.

c) *A könyv nagy hangsúlyt helyez a halmazelméletre és a matematikai logikára.* A szerző meggyőződése, hogy a téma alapos ismerete elengedhetetlen a matematikai alapjainak megértéséhez.

4. *Hiszünk abban, hogy inkább „kevesebbet, de mélyebben” érdemes tanítani*, mint nagy ismeretanyagot, de felületesen. Különösen igaz ez a matematika alapjaira. A könyv teljes anyaga messze meghaladja az egyetlen szemeszter heti 2 órájában átadható tudást. Ráadásul az írásba foglalt ismeretanyag mindig bővebb és pontosabb az előadáson elhangzottaknál. Ne arra törekedjünk, hogy egy szemeszter alatt minél nagyobb anyagot végezzünk el, hanem arra, hogy számunkra kedves, érdekes és fontosnak tartott témákban mélyedjünk el. Ennek érdekében még az első rész ismeretanyagának egy részét is feláldozhatjuk. Például az elsőrendű logikával foglalkozó 4. fejezetből elhagyhatjuk a fejlettebb számolási technikát igénylő szakaszokat, de ugyanígy az 5., halmazelméleti fejezetből, vagy a 6., számfogalomról szóló fejezetből is elhagyhatunk részeket. Ezzel egyidőben a második részből is szóba hozhatunk bizonyos fejezeteket (pl. a bizonyításelméletet vagy az

algebrai logikát). Fontos, hogy külön figyelmet fordítsunk a már említett 7. fejezetre.

Az első rész vonatkozásában két lehetséges feldolgozási módot ajánlunk:

a) Feladatcentrikus feldolgozás. Ez a gyakorlatban egy interaktív és könnyedébb feldolgozást jelent.

b) Elméletcentrikus feldolgozás.

Az a) esetben kap erőteljes hangsúlyt a III. részben található példatár. A szerző az oktatás során mindkét megközelítést kipróbálta.

Néhány szó a II. részről. Számos olyan fontos gondolat előkerül az I. részben (a „törzsanyagban”), amelyek részletes kifejtésére az adott szituáció nem alkalmas, ugyanakkor – bizonyos értelemben – veszteség lenne róluk megfeledezni. A II. részben ezek kifejtésére sor kerül. Az érintett témakörök közül több határterület, így áttekintésük különösen hasznos. Például a bizonyításelmélet a logika és az elméleti számítástudomány határterületének tekinthető, a nemstandard analízis az analízis és a logika határterületének, az induktív logika a matematikai statisztika és a logika határterületének, az algebrai logika az algebra és a logika határterületének, a mértékelmélet pedig a valószínűségszámítás és az analízis határterületének. A felsorolásból az is látszik, hogy ezek a fejezetek alkalmasak arra, hogy elmélyítsük analízisbeli, algebrai, valószínűségszámítási, valamint logikai ismereteinket. A II. rész ezen túl néhány igen korszerű, nagy jövő előtt álló területet is érint, például a gépi bizonyítások kérdését vagy az algoritmuselméletet. Megjegyezzük, hogy míg az I. részben *a fejezetek egymásra épülnek*, addig a második részben nem ez a helyzet, tehát tanulmányozásuk *tetszőleges sorrendben* történhet. Felvethető természetesen, hogy legalább a II. részbe bekerülhettek volna olyan témák, mint a geometria, a gráfelmélet vagy a klasszikus algebra. Ennek a terjedelmi korlátok szabtak határt.

Szeretnék köszönetet mondani a könyv létrejöttében segítséget nyújtó matematikus hallgatónak, továbbá kollégámnak, Simon Andrásnak. Köszönettel tartozom a könyv lektorának, Sain Ildikónak lelkiismeretes munkájáért, valamint Simonovits Andrásnak és Csima Juditnak szakmai segítségükért.

*A szerző*