

# Tartalom

<b>1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók</b>	<b>9</b>
1.1. Sűrűségfüggvény és valószínűség . . . . .	9
1.2. Kétdimenziós folytonos eloszlás szemléltetése festékekkel . . . . .	10
1.3. Feltételes valószínűség . . . . .	12
1.4. Feltételes sűrűségfüggvény egy pozitív valószínűségű eseményen belül . . . . .	13
1.5. Szorzási szabály független valószínűségi változókra . . . . .	13
1.6. Általános szorzási szabály . . . . .	14
1.7. Eloszlásfüggvény . . . . .	16
<b>2. Kétdimenziós egyenletes eloszlás</b>	<b>17</b>
2.1. Egyenletes eloszlás véges területű halmazon . . . . .	17
2.2. Végtelen területű halmazon nem létezik egyenletes eloszlás . . . . .	17
<b>3. Béta-eloszlások két dimenzióban</b>	<b>19</b>
3.1. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek dél és egy óra között . . . . .	19
3.1.1. Három ember esete . . . . .	19
3.1.2. Tíz ember esete . . . . .	23
3.1.3. Általános eset . . . . .	25
3.2. Ábrák . . . . .	26
3.3. Feladatok megoldásokkal . . . . .	32
3.4. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek valamilyen véges intervallumon . . . . .	34
3.5. Ha az érkezések tetszőleges eloszlást követnek ( <i>Extra tananyag</i> ) . . . . .	35
<b>4. Kísérleti eredmények függvényének várható értéke</b>	<b>37</b>
4.1. Diszkrét eset (ismétlés) . . . . .	37
4.2. Folytonos eset . . . . .	38
4.3. Szorzat várható értéke . . . . .	39
<b>5. NSZT a kísérleti eredmények függvényének átlagára</b>	<b>41</b>
5.1. Diszkrét eset (ismétlés) . . . . .	41
5.2. Folytonos eset . . . . .	43
<b>6. Vetület- és feltételes eloszlások</b>	<b>45</b>
6.1. Vetítések koordinátatengelyekre . . . . .	45
6.2. Vetületeloszlások sűrűségfüggvénye . . . . .	46
6.3. Feltételes eloszlások sűrűségfüggvénye . . . . .	47
6.4. Feltételes sűrűségfüggvények rendszere . . . . .	50
6.5. Sűrűségfüggvények keverése . . . . .	51

6.6.	Feltételes eloszlásfüggvény . . . . .	52
6.7.	Feltételes valószínűség . . . . .	53
6.8.	Feltételes medián . . . . .	54
6.9.	Feltételes várható érték . . . . .	55
6.10.	Feltételes variancia . . . . .	55
6.11.	Feltételes szórás . . . . .	56
6.12.	Egy számolás mintapélda: $Y = \text{RND}_1$ , $X = Y \cdot \text{RND}_2$ . . . . .	57
6.13.	Folytonos szimuláció két dimenzióban . . . . .	59
<b>7.</b>	<b>Transzformáció síkról síkra</b>	<b>63</b>
7.1.	Példa: transzformáció szorzás és osztás segítségével . . . . .	63
7.1.1.	A transzformáció definíciója . . . . .	63
7.1.2.	A transzformáció inverzének képletpárja . . . . .	63
7.1.3.	Az egységnégyzet képe egy „vitorla” alakú halmaz . . . . .	64
7.1.4.	A transzformáció hatásának szemléltetése . . . . .	64
7.1.5.	A „börtönács” „díszes rács”-ba transzformálódik, a négyzetből pedig „vitorla” lesz . . . . .	68
7.1.6.	Pontfelhők transzformációja . . . . .	70
7.1.7.	Eloszlások transzformációja . . . . .	71
7.2.	Jacobi-mátrix . . . . .	72
7.3.	Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat . . . . .	73
<b>8.</b>	<b>Lineáris transzformáció síkról síkra</b>	<b>75</b>
8.1.	Mátrixszal való szorzás . . . . .	75
8.2.	Mátrixszal való szorzás és eltolás . . . . .	76
<b>9.</b>	<b>Transzformáció síkról egyenesre</b>	<b>77</b>
9.1.	Példák ábrákkal szemléltetve . . . . .	77
9.1.1.	Transzformáció a $z = x + y$ összegfüggvénnyel . . . . .	77
9.1.2.	Transzformáció a $z = x \cdot y$ szorzatfüggvénnyel . . . . .	78
9.1.3.	Transzformáció a $z = x/y$ hányadosfüggvénnyel . . . . .	79
9.2.	Általános transzformációs képlet . . . . .	80
9.3.	Számolások a fentebbi példákkal kapcsolatban . . . . .	81
9.3.1.	Transzformáció a $z = x + y$ összegfüggvénnyel . . . . .	81
9.3.2.	Transzformáció a $z = x \cdot y$ szorzatfüggvénnyel . . . . .	84
9.3.3.	Transzformáció a $z = x/y$ hányadosfüggvénnyel . . . . .	86
9.4.	Kétlépéses módszer a $z = x + y$ transzformáció esetén – példák ábrákkal szemléltetve . . . . .	88
9.4.1.	Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben . . . . .	88
9.4.2.	Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben . . . . .	89
9.4.3.	Kétdimenziós exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben . . . . .	90
9.5.	Kétlépéses módszer a $z = x + y$ transzformáció esetén – általános képlet . . . . .	91
9.6.	Számolások a fentebbi kétlépéses példákkal kapcsolatban . . . . .	93
9.6.1.	Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben . . . . .	93
9.6.2.	Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben . . . . .	94
9.6.3.	Kétdimenziós exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben . . . . .	94
9.7.	Konvolúció . . . . .	94

<b>10. Regresszió a mediánnal és a várható értékkel</b>	<b>97</b>
10.1. Regresszió egy dimenzióban . . . . .	97
10.1.1. A medián minimál tulajdonsága . . . . .	97
10.1.2. A távolság várható értékének minimalizálása . . . . .	98
10.1.3. A várható érték minimál tulajdonsága . . . . .	99
10.1.4. A távolság négyzete várható értékének minimalizálása . . . . .	100
10.2. Regresszió két dimenzióban . . . . .	101
10.2.1. A hiba abszolút értéke várható értékének minimalizálása . . . . .	101
10.2.2. A hiba négyzete várható értékének minimalizálása . . . . .	102
10.3. Egy számolós mintapélda . . . . .	102
<b>11. Normális eloszlások a síkon</b>	<b>105</b>
11.1. Standard normális eloszlás a síkon . . . . .	105
11.2. Standard normális eloszlás $r$ korrelációval . . . . .	106
11.3. Normális eloszlás $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, r$ paraméterekkel . . . . .	109
11.4. Vetületeloszlások . . . . .	116
11.5. Feltételes sűrűségfüggvény . . . . .	117
11.6. Feltételes medián és várható érték . . . . .	118
11.7. Feltételes szórás . . . . .	118
11.8. Példa: Testmagasság és testsúly . . . . .	119
11.9. Példa: A műszer hibáját korrigáljuk . . . . .	122