

Tartalomjegyzék

I. Feladatok	11
1. Alapfogalmak. A valós számok axiómarendszere	13
1.0.1. Logikai alapfogalmak	13
1.0.2. Halmazok, függvények, kombinatorika	18
1.0.3. Bizonyítási módszerek: indirekt bizonyítás	21
Fibonacci számok	25
1.0.4. Egyenlőtlenségek és szélsőérték-feladatok megoldása	26
1.1. Valós számok	28
1.1.1. Testaxiómák	28
1.1.2. Rendezési axiómák	29
1.1.3. Arkhimédészi axióma	30
1.1.4. Cantor-axióma	30
1.1.5. A számegegyenes, intervallumok	32
1.1.6. Teljességi tétel, összefüggőség, a számegegyenes topológiája	35
1.1.7. Hatványozás	38
2. Végtelen számsorozatok konvergenciája	39
2.1. Elméleti feladatok	39
2.2. Sorozatok nagyságrendje, Közöbindex	45
2.3. Torlódási pontok, liminf, limsup	48
2.4. Határértékszámítás	51
2.5. Rekurzívan definiált sorozatok	55
2.6. Az e szám	58
2.7. A Bolzano–Weierstrass-tétel és a Cauchy-kritérium	59
2.8. Végtelen sorok: bevezetés	60
2.9. Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok	63
2.9.1. Megszámlálható halmazok	63
2.9.2. Kontinuum számosságú halmazok	64
2.9.3. Számosságok összehasonlítása	64

3. Valós függvények határértéke, folytonossága	67
3.1. Valós függvények globális tulajdonságai	67
3.2. Függvények folytonossága és határértéke	71
3.3. Függvény-határértékek kiszámítása	79
3.4. Az átviteli elv	84
3.5. Korlátos zárt intervallumon folytonos függvények	85
3.6. Egyenletes folytonosság	87
3.7. Monotonitás és folytonosság	88
3.8. Konvexitás és folytonosság	89
3.9. A függvénygrafikon ívhossza	89
3.10. Exponenciális, logaritmus- és hatványfüggvények	91
3.10.1. Nevezetes egyenlőtlenségek	93
3.11. Trigonometrikus függvények és inverzeik	95
4. A differenciálszámítás és alkalmazásai	97
4.1. A differenciálhatóság fogalma	97
4.1.1. Érintő	105
4.2. Magasabb rendű differenciálhányadosok	106
4.3. A lokális tulajdonságok és a derivált kapcsolata	108
4.4. Középtértéktételek	109
4.4.1. Gyökök száma	112
4.5. Szélsőérték-feladatok	112
4.5.1. Egyenlőtlenségek, becslések	113
4.6. A differenciálható függvények vizsgálata	115
4.6.1. Konvexitás	115
4.7. A L'Hospital-szabály	116
4.8. Polinomapproximáció, Taylor-polinom	118
5. Az egyváltozós Riemann-integrál és alkalmazásai	123
5.0.1. A határozatlan integrál	123
5.0.2. A deriváltfüggvények tulajdonságai	125
5.1. A határozott integrál	126
5.1.1. Nem elemi integrálok, Liouville-tétel	131
5.1.2. Az integrál értékére vonatkozó egyenlőtlenségek	132
5.2. Integrálszámítás	134
5.2.1. Az integrálás és a differenciálás kapcsolata	139
5.3. Az integrálszámítás alkalmazásai	140
5.3.1. Terület- és térfogatszámítás	143
5.3.2. Ívhossz-számítás	144
5.3.3. A forgási felületek felszíne	145
5.4. Korlátos változású függvények	145
5.5. A Stieltjes-integrál	146

5.6. Az improprius integrál	148
6. Numerikus sorok	153
7. Függvénysorozatok és sorok	159
7.1. Függvénysorozatok konvergenciája	159
7.2. Függvénysorok konvergenciája	161
7.3. Taylor-sorok és hatványsorok	164
8. Többváltozós függvények differenciálása	167
8.1. $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ függvények	167
8.1.1. A ponthalmazelmélet alapjai	167
8.1.2. Határérték és folytonosság \mathbb{R}^n -ben	170
8.1.3. Differenciálás \mathbb{R}^n -ben	173
8.2. $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ függvények	180
8.2.1. Határérték és folytonosság	180
8.2.2. Differenciálhatóság	181
9. Többdimenziós Jordan-mérték és Riemann-integrál	185
10. Integráltételek	193
10.1. A vonalintegrál	193
10.2. Newton-Leibniz formula	194
10.3. A primitív függvény létezése	195
10.4. Integráltételek	198
11. Mértékelmélet	201
11.1. Halmazalgebrák	201
11.2. Mértékek és külső mértékek	202
11.3. Mérhető függvények. Integrál	205
11.4. Függvénysorozatok és -sorok integrálása	207
11.5. Fubini-tétel	208
11.6. Differenciálás	208
12. Komplex differenciálhatóság	211
12.0.1. Komplex számok	211
12.0.2. A Riemann-gömb	214
12.1. Reguláris függvények	215
12.1.1. Komplex differenciálhatóság	215
12.1.2. Cauchy–Riemann parciális egyenletek	216
12.2. Hatványsorok	216
12.2.1. A hatványsor konvergenciatartománya	216
12.2.2. Az összegfüggvény regularitása	217

12.2.3. Taylor-sor	218
12.3. Elemi függvények	218
12.3.1. Az exponenciális és trigonometrikus függvények	218
12.3.2. Komplex logaritmus	219
13.A komplex vonalintegrál és alkalmazásai	223
13.0.3. A komplex vonalintegrál	223
13.0.4. A Cauchy-tétel	224
13.1. A Cauchy formulák	226
13.2. Hatvány- és Laurent-sorba fejtés	228
13.2.1. Hatványsorba fejtés, Liouville-tétel	228
13.2.2. Laurent-sorba fejtés	229
13.3. Reguláris függvények lokális tulajdonságai	232
13.3.1. Unicitás-tétel	232
13.3.2. Maximum-elv	233
13.4. Izolált szingularitások	234
13.4.1. Szingularitások	234
13.4.2. A reziduomtétel	235
13.4.3. A reziduum kiszámítása	238
13.4.4. A reziduomtétel alkalmazásai	239
Végtelen sorok összegének kiszámítása	240
Valós integrálok kiszámítása	241
13.4.5. Argumentum elv és Rouché tétele	245
14.Konform leképezések	247
14.1. Törtlineáris függvények	247
14.2. Riemann alaptétel	250
14.3. Schwarz-lemma	253
14.4. Kiterjesztés a határra	255
14.5. Tükrözési elv	255
II. Megoldások	257
15.Megoldási ötletek és végeredmények	259
16.Megoldások	287