

C

Alaptagok Nyquist- és Bode-diagramjai

C.1. Bevezetés - Átviteli függvény, frekvenciafüggvény

Dinamikus rendszerek leírásának egyik módja az átviteli függvények segítségével történik. Az átviteli függvényeket a rendszer differenciálegyenletéből kiindulva a \mathcal{L} -transzformáció alkalmazásával vezethetjük be (lásd [3] A függelék). Vegyük a differenciálegyenlet \mathcal{L} -transzformáltját zérus kezdeti értékekkel, majd rendezzük a benne szereplő $Y(s)$ és $U(s)$ tagok szerint, ahonnan kapjuk a $G(s)$ racionális törtfüggvényt:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (\text{C.1})$$

Az átviteli függvény tehát a kimenőjel és a bemenőjel zérus kezdeti feltételekkel vett \mathcal{L} -transzformáltjainak hányadosa.

Az átviteli függvényt ún. pólus-zérus alakban is felírhatjuk:

$$G(s) = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad (\text{C.2})$$

ahol z_j jelöli a rendszer zérusait, vagyis a $b(s) = 0$ egyenlet gyökeit, míg p_i jelöli a rendszer pólusait, vagyis az $a(s) = 0$ egyenlet gyökeit.

A $G(s)$ leírásának egy további lehetséges módja az időállandós alak. Alaptagok általános időállandós alakja a következő:

$$G(s) = \frac{C(s)}{T_n s^n + T_{n-1} s^{n-1} + \dots + T_1 s + \underbrace{1}_{0T}}. \quad (\text{C.3})$$

IT

406 C. Alaptagok Nyquist- és Bode-diagramjai

Itt a nevező polinom fokszáma adja meg, hogy hány tárolós a tag. Így egy n -edfokú nevező polinom n tárolós tagot jelent, rövid jelölése nT . A számláló $C(s)$ eleme háromféle alakú lehet:

1. A ekkor a tag arányos (P),
2. $A_d s$ ekkor a tag differenciáló (D),
3. $\frac{A_I}{s}$ ekkor a tag integráló (I).

A lineáris dinamikus időinvariáns rendszerek frekvenciatartományban való vizsgálatát szinuszos lefutású bemenőjelekre adott válaszfüggvényeik segítségével végezhetjük el. Ehhez bevezetjük a frekvenciafüggvény fogalmát. Egy rendszer frekvencia-válaszfüggvényének (vagy egyszerűbben frekvenciafüggvényének) a rendszer egység amplitúdójú szinuszos bemenőjelre állandósult állapotban adott válaszfüggvényét nevezzük.

A frekvenciafüggvényt a differenciálegyenletből a jelek exponenciális alakjának és az exponenciális függvény differenciálási szabályának felhasználásával egyszerű átrendezéssel, míg az átviteli függvényből formálisan az $s = i\omega$ helyettesítéssel kapjuk. Ez utóbbi kapcsolat mutatja azt is, hogy a frekvenciafüggvényeket a differenciálegyenletekből az ún. Fourier-transzformációval, zérus kezdeti feltételekkel közvetlenül is megkaphatjuk [3]. A $G(i\omega)$ függvényeket a rendszer frekvenciafüggvényének nevezzük, és az ω körfrekvencia szerint ábrázoljuk.

Nyquist-diagram: A Nyquist-diagramon való ábrázolás kétféle módon is felfogható. A frekvenciafüggvény értéke egy adott ω_0 frekvencián egy komplex szám:

$$G(i\omega_0) = \operatorname{Re}G(i\omega_0) + i\operatorname{Im}G(i\omega_0). \quad (\text{C.4})$$

Ez a szám komplex számsíkon ábrázolható és így $\omega = 0 \dots \infty$ tartományon a pontokat ábrázolva adódik a Nyquist-diagram.

A másik szemlélethez definiálni kell egy adott ω_0 frekvenciára vonatkozóan az amplitúdót $A(\omega_0)$ és fáziszöveget $\varphi(\omega_0)$:

$$A(\omega_0) = \sqrt{\operatorname{Re}G(i\omega_0)^2 + \operatorname{Im}G(i\omega_0)^2}, \quad (\text{C.5})$$

$$\varphi(\omega_0) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}G(i\omega_0)}{\operatorname{Re}G(i\omega_0)}. \quad (\text{C.6})$$

Így az amplitúdó, mint a fázisszöggel irányított szakasz ábrázolható derékszögű koordinátarendszerben. Ez a koordinátarendszer lehet a komplex szám sík is, ahol ha a Re valós tengellyel bezárt szög a fázisszög akkor a kétféle szemlélet azonos ábrázolást ad (márpedig definíció szerint a fázisszög a Re tengellyel bezárt szög).

A továbbiakban az alaptagok (0-tól 2 tárolóig) Nyquist- és Bode-diagramjainak alakját ismertetjük a jellegzetes pontok meghatározását is leírva (és a frekvenciafüggvényt az ábrázoláshoz használt paraméterekkel is megadva). Az ezekhez kapcsolódó hosszabb levezetéseket és az állítások igazolását a C.3 fejezet tartalmazza.

Összetett tagok Nyquist-diagramját a következő módon ábrázoljuk: A frekvenciafüggvényt felbontjuk alaptagok összegére. Az így kiadódott alaptagok Nyquist-diagramjait pontonként összeadva (az azonos ω frekvenciához tartozó vektorokat összegezve) kapjuk az eredő Nyquist-diagramot.

Összetett tagok Bode-diagramját a következő módon ábrázoljuk: A frekvenciafüggvényt felbontjuk alaptagok szorzatára. Az így kiadódott alaptagok Bode-diagramjait pontonként összeadva (az azonos ω frekvenciához tartozó pontokat összegezve) kapjuk az eredő Bode-diagramot. Ennek igazolását lásd a C.3 pontban.

C.2. Alaptagok frekvenciatartományi vizsgálata

0TP 0 tárolós arányos tag

Átviteli függvénye:

$$G(s) = A.$$

Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = A = 2.$$

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

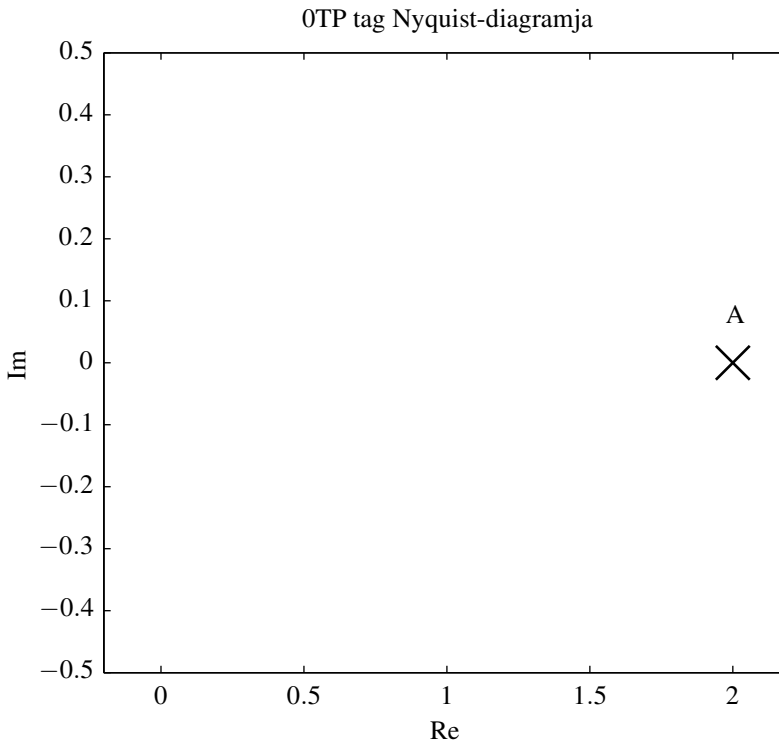
$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = A,$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = A.$$

Nyquist diagramja egyetlen pont (lásd C.1 ábra).

Bode amplitúdó diagramja egy a 0 dB-es tengellyel párhuzamos egyenes $20 \cdot \lg(A)$ magasságban. Bode fázis diagramja konstans nulla (lásd C.2 ábra). Itt $a(\omega) = 20 \cdot \lg|A(\omega)|$ az amplitúdó felhasznált definíciója, mely az amplitúdót decibel (dB) mértékegységben adja eredményül.

408 C. Alaptagok Nyquist- és Bode-diagramjai



C.1. ábra. 0TP alaptag Nyquist-diagramja

0TD 0 tárolós differenciáló tag

Átviteli függvénye:

$$G(s) = A_d s.$$

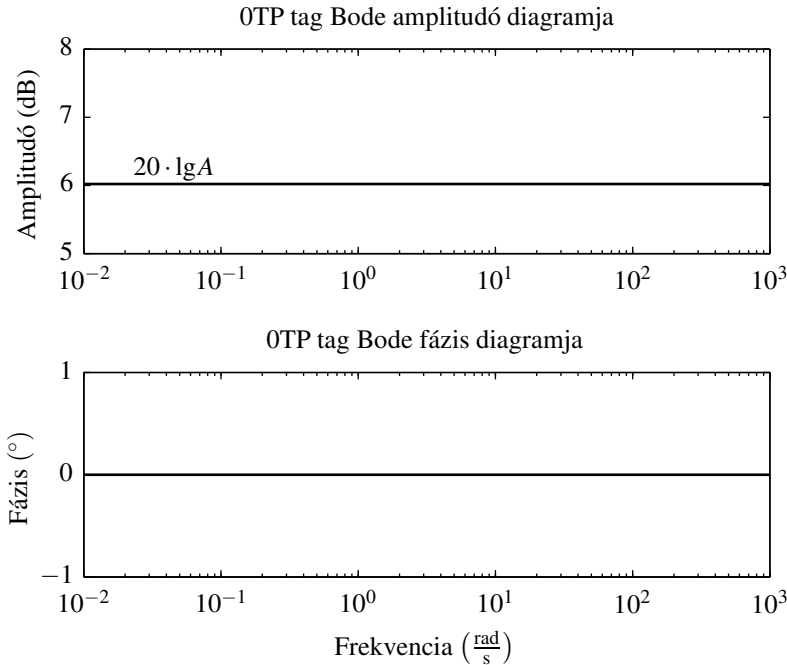
Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = A_d i\omega = 2i\omega.$$

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = 0,$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = i\infty.$$



C.2. ábra. OTP alaptag Bode-diagramja

Nyquist-diagramja egy egyenes 0-ból $i\infty$ -be (lásd C.3 ábra).

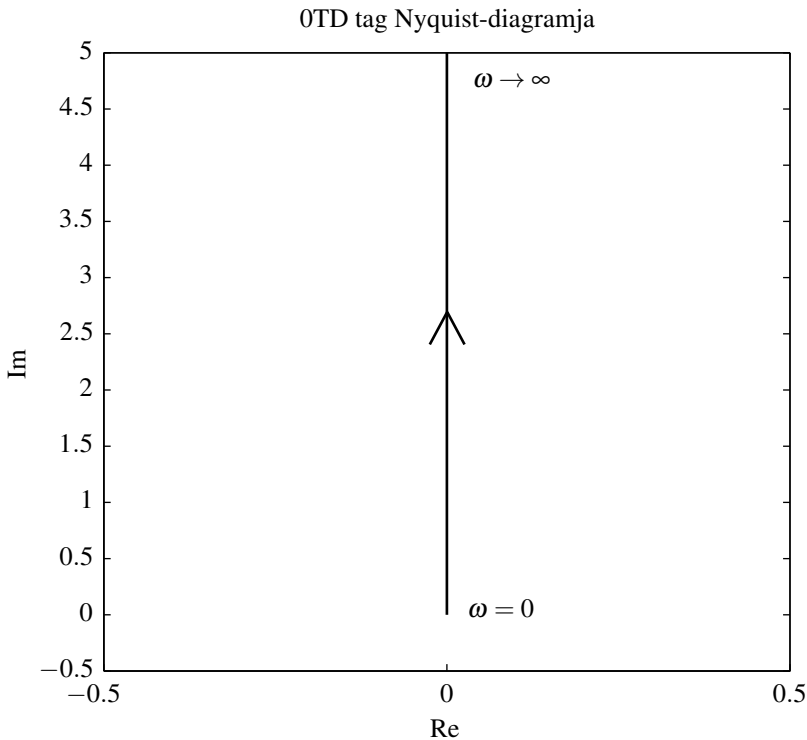
Bode amplitúdó diagramja egy a $+20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes, mely a 0dB-es tengelyt az $\frac{1}{A_d}$ frekvencián metszi. Bode fázis diagramja konstans $+90^\circ$ (lásd C.4 ábra). Ennek igazolását a C.3 alfejezet tartalmazza. 1 dekád a tízes alapú logaritmikus skálán a 10 két egymást követő hatványa közti távolságot jellemzi. Például 1 dekád a távolság 10^k és 10^{k+1} közt, de ugyanígy $0.25 \cdot 10^k$ és $0.25 \cdot 10^{k+1}$ között is.

OTI 0 tárolás integráló tag

Átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{A_I}{s}.$$

410 C. Alaptagok Nyquist- és Bode-diagramjai



C.3. ábra. 0TD alaptag Nyquist-diagramja

Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = \frac{A_I}{i\omega} = -\frac{A_I i}{\omega} = -\frac{2i}{\omega}.$$

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

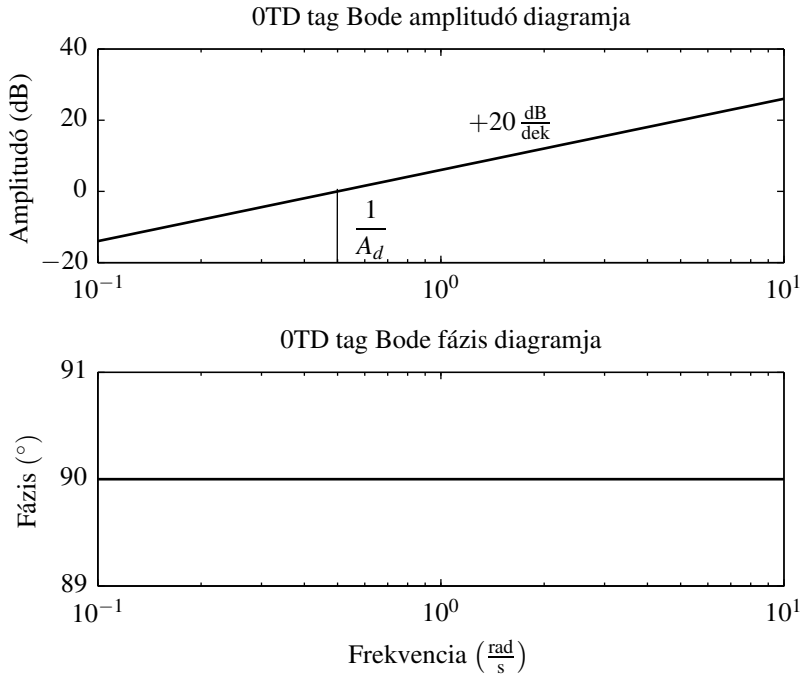
$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = -i\infty,$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = 0.$$

Nyquist-diagramja egy egyenes $-i\infty$ -ből 0-ba (lásd C.5 ábra).

Bode amplitúdó diagramja egy $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes, mely a 0dB-es tengelyt az A_I frekvencián metszi. Bode fázis diagramja konstans -90° (lásd C.6 ábra). Ennek igazolását a C.3 alfejezet tartalmazza.

C. Alaptagok Nyquist- és Bode-diagramjai 411



C.4. ábra. 0TD alaptag Bode-diagramja

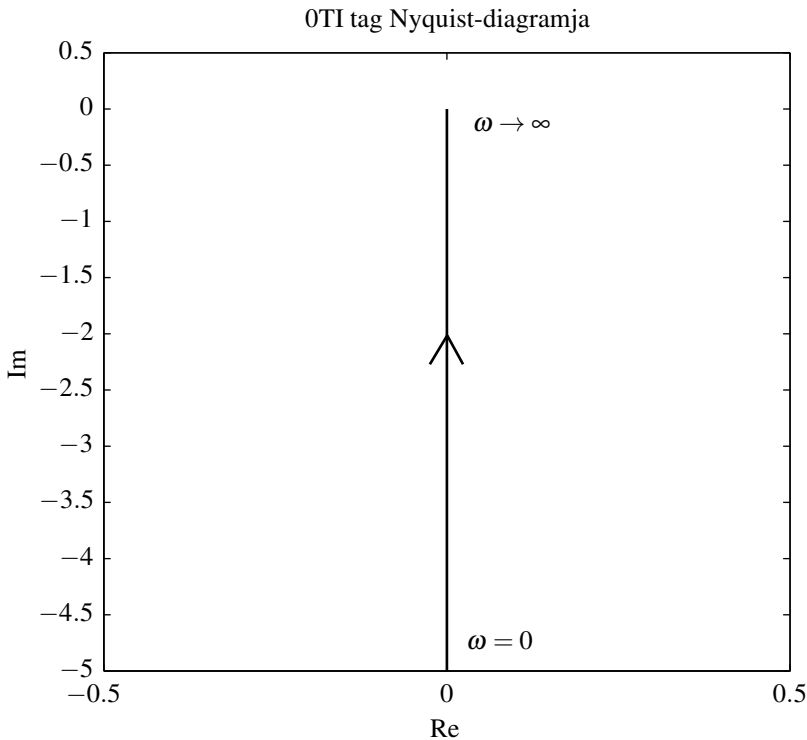
1TP 1 tárolós arányos tag

Átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{A}{Ts + 1}.$$

Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = \frac{A}{Ti\omega + 1} = \frac{A - ATi\omega}{1 + T^2\omega^2} = \frac{5}{2i\omega + 1}.$$



C.5. ábra. 0TI alaptag Nyquist-diagramja

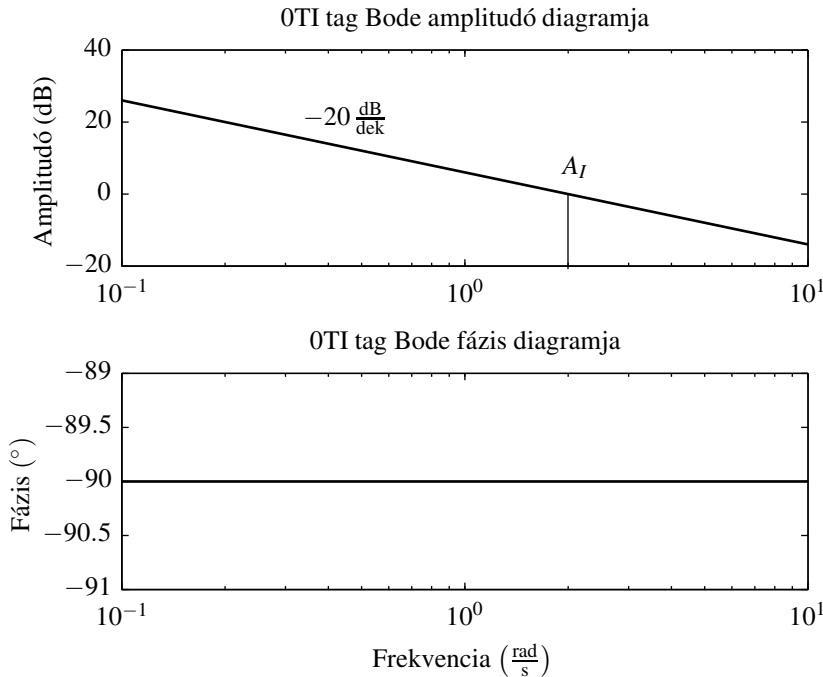
A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = Aq,$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = 0,$$

$$\omega_s = \frac{1}{T} \Rightarrow G\left(i\frac{1}{T}\right) = \frac{A - Ai}{2} = \frac{A}{2} - \frac{Ai}{2}.$$

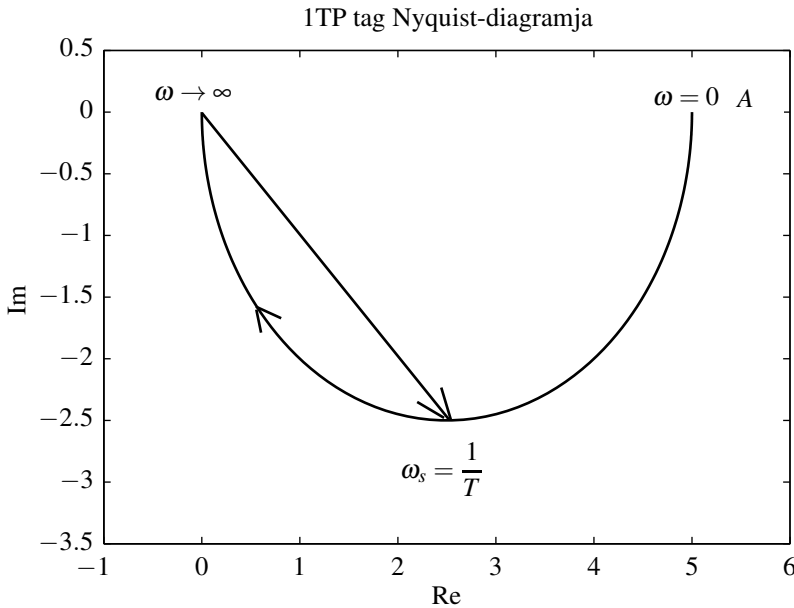
A fenti kifejezésben ω_s az úgynevezett sarokfrekvencia, itt $\varphi(\omega_s) = -45^\circ$. A tag Nyquist-diagramja egy félkör az alsó síknegyedben A-ból 0-ba (lásd C.7 ábra). A félkör alak igazolása a C.3 alfejezetben megtalálható.



C.6. ábra. OTI alaptag Bode-diagramja

A Bode-diagram esetében a továbbiakban az aszimptotikus szerkesztés módszerét ismertetjük. A diagramokon szaggatott vonallal jelöljük az aszimptotikus közelítést, míg folytonossal a valódi frekvencia válaszokat.

1TP tag Bode amplitúdó diagramja $\omega_s = \frac{1}{T}$ frekvenciáig egy $20 \cdot \lg A$ magasságban haladó vízszintes egyenes, majd a sarokfrekvenciától $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes. Fázisdiagramja 0° a sarokfrekvencia tizedénél kisebb frekvenciákra, $-45 \frac{\circ}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes $0.1\omega_s$ és $10\omega_s$ frekvenciák között és -90° a sarokfrekvencia tízszeresénél nagyobb frekvenciák esetén (lásd C.8 ábra). Ennek igazolását a C.3 alfejezet tartalmazza. Látható, hogy $\omega_s = \frac{1}{T}$ frekvencián a Bode fázis diagram a Nyquist-diagrammal meg-



C.7. ábra. 1TP alaptag Nyquist-diagramja

egyezően éppen -45° értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.

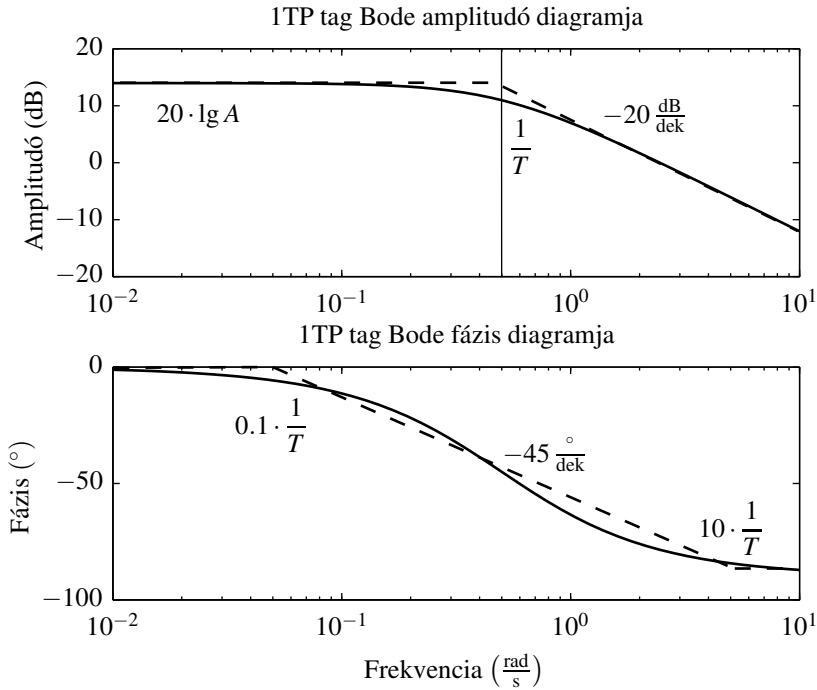
1TD 1 tárolós differenciáló tag

Átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{A_d s}{T s + 1}.$$

Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = \frac{A_d i\omega}{T i\omega + 1} = \frac{A_d T \omega^2 + A_d i\omega}{1 + T^2 \omega^2} = \frac{5i\omega}{2i\omega + 1}.$$



C.8. ábra. 1TP alaptag Bode-diagramja

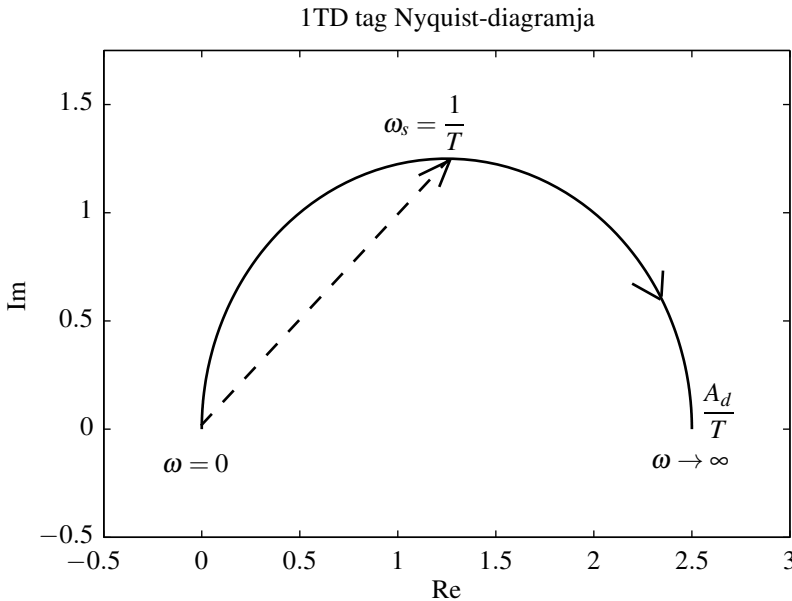
A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = 0,$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = \frac{A_d}{T},$$

$$\omega_s = \frac{1}{T} \Rightarrow G\left(i\frac{1}{T}\right) = \frac{A_d + A_d i}{2T} = \frac{A_d}{2T} + \frac{A_d i}{2T}.$$

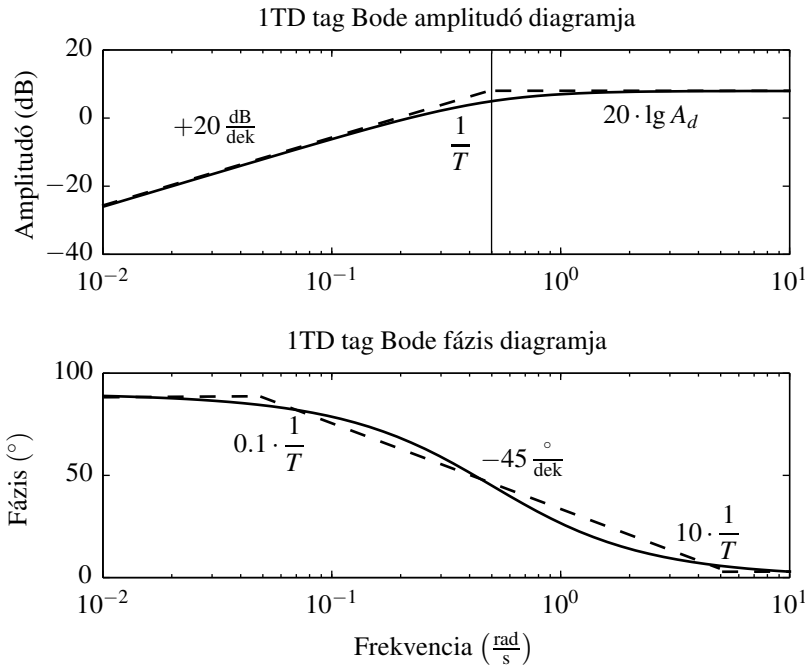
A fenti kifejezésben ω_s az úgynevezett sarokfrekvencia, itt $\varphi(\omega_s) = +45^\circ$. A tag Nyquist-diagramja egy félkör a felső síknegyedben 0-ból $\frac{A_d}{T}$ -be (lásd C.9 ábra). A félkör alak igazolása a C.3 alfejezetben megtalálható.



C.9. ábra. 1TD alaptag Nyquist-diagramja

Az 1TD tag Bode-diagramját legkönnyebben szerkesztéssel határozhatjuk meg. Figyelembe véve az összetett tagok ábrázolására vonatkozó tételt (lásd C.3 alfejezet), az 1TD tag felfogható egy 0TD és egy 1TP alaptag sorba kapcsolt eredőjeként. Az alaptagok amplitúdó és fázis görbéit megrajzolva, majd minden frekvencián összegezve kapjuk az eredő görbéket, melyről a következőket mondhatjuk:

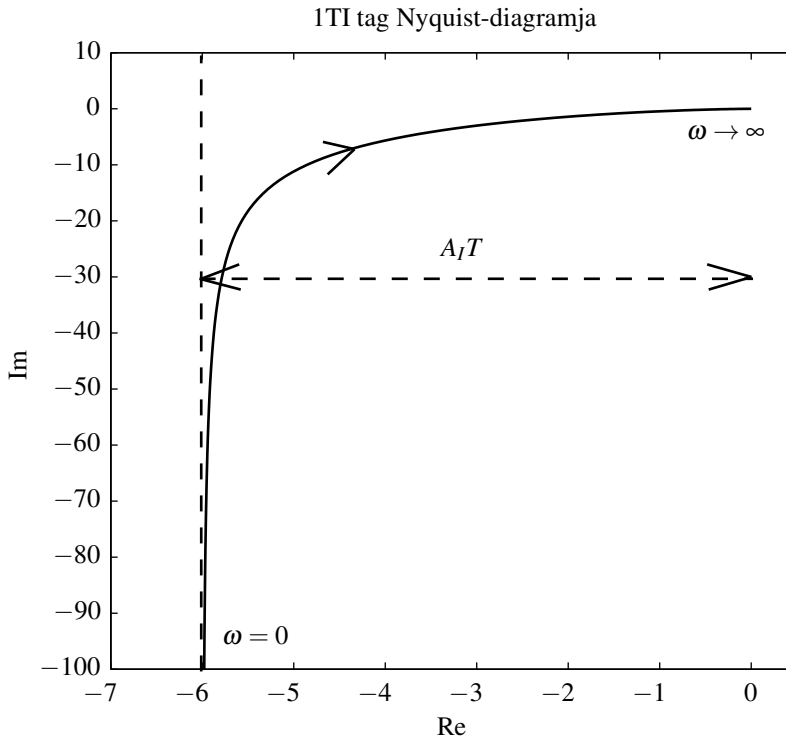
- az amplitúdó görbe egy $+20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes $\omega < \frac{1}{T}$ frekvenciákon, mely az $\frac{1}{A_d}$ pontban metszi (metszené) a 0 dB-es tengelyt, majd $\frac{1}{T} < \omega$ frekvenciákra egy $20 \cdot \lg \frac{A_d}{T}$ erősítésű vízszintes egyenes. A 0 dB-es tengellyel való metsződés az $\frac{1}{T}$ és $\frac{1}{A_d}$ frekvenciák viszonyától függ. Ha $\frac{1}{T} > \frac{1}{A_d}$ akkor létrejön a metsződés, ha $\frac{1}{T} < \frac{1}{A_d}$ akkor



C.10. ábra. 1TD alaptag Bode-diagramja

nem jön létre metsződés, ha $\frac{1}{T} = \frac{1}{A_d}$ akkor a diagram éppen a 0 dB-es tengelyre törik.

- a fázis 90° és 0° között változik, $0.1\omega_s$ -nél kisebb frekvenciák esetén 90° , $0.1\omega_s$ és $10\omega_s$ frekvenciatartományon $-45 \frac{^\circ}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes, $10\omega_s$ -nél nagyobb frekvenciák esetén 0° (lásd C.10 ábra).
Látható, hogy $\omega_s = \frac{1}{T}$ frekvencián a Bode fázisdiagram a Nyquist-diagrammal megegyezően éppen $+45^\circ$ értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.



C.11. ábra. 1TI alaptag Nyquist-diagramja

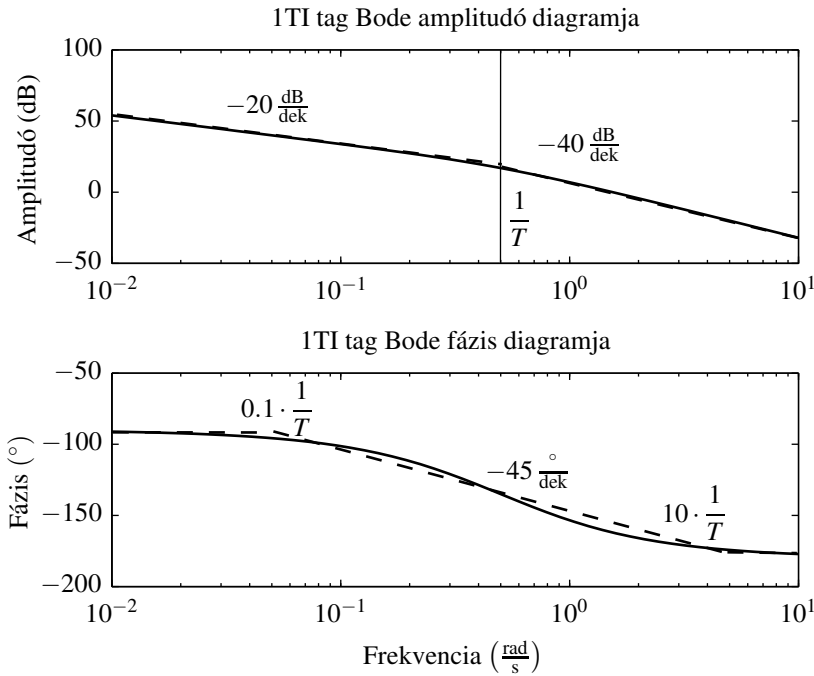
1TI 1 tárolás integráló tag

Átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{A_I}{s(Ts+1)}.$$

Frekvenciafüggvénye:

$$\begin{aligned} G(i\omega) &= \frac{A_I}{i\omega(Ti\omega+1)} = \frac{-A_I T \omega^2 - A_I \omega i}{T^2 \omega^4 + \omega^2} \\ &= \frac{-A_I T - \frac{A_I}{\omega} i}{T^2 \omega^2 + 1} = \frac{2}{3(i\omega)^2 + i\omega}. \end{aligned}$$



C.12. ábra. 1TI alaptag Bode-diagramja

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = -A_I T - i\infty,$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = 0,$$

$$\omega_s = \frac{1}{T} \Rightarrow G\left(i\frac{1}{T}\right) = \frac{-A_I T - A_I T i}{2} = -\frac{A_I T}{2} - \frac{A_I T i}{2}.$$

A fenti kifejezésben ω_s az úgynevezett sarokkörfrekvencia, itt $\varphi(\omega_s) = -135^\circ$. A tag Nyquist-diagramja $\omega = 0$ -ban az $A_I T - i\infty$ pontból indul és a 0 pontba fut be. Aszimptotája az $A_I T$ -vel jellemzett egyenes (lásd C.11 ábra).

Az 1TI tagot mint 0TI és 1TP tagok soros kapcsolásának tekintve a Bode-diagramok:

420 C. Alaptagok Nyquist- és Bode-diagramjai

- az amplitúdó görbe egy $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes $\omega < \frac{1}{T}$ frekvenciákon, majd $\frac{1}{T} < \omega$ frekvenciákra egy $-40 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes. A 0 dB-es tengellyel való metsződés az $\frac{1}{T}$ és A_I frekvenciák viszonyától függ. Ha $\frac{1}{T} > A_I$ akkor $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$, egyéb esetben $-40 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekséggel metszi a görbe a 0 dB-es tengelyt.
- a fázis -90° és -180° között változik, $0,1\omega_s$ -nél kisebb frekvenciák esetén -90° , $0,1\omega_s$ és $10\omega_s$ frekvenciatartományon $-45 \frac{\circ}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes, $10\omega_s$ -nél nagyobb frekvenciák esetén -180° (lásd C.12 ábra). Látható, hogy $\omega_s = \frac{1}{T}$ frekvencián a Bode fázisdiagram a Nyquist-diagrammal megegyezően éppen -135° értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.

2TP 2 tárolás arányos tag

Átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{A}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}.$$

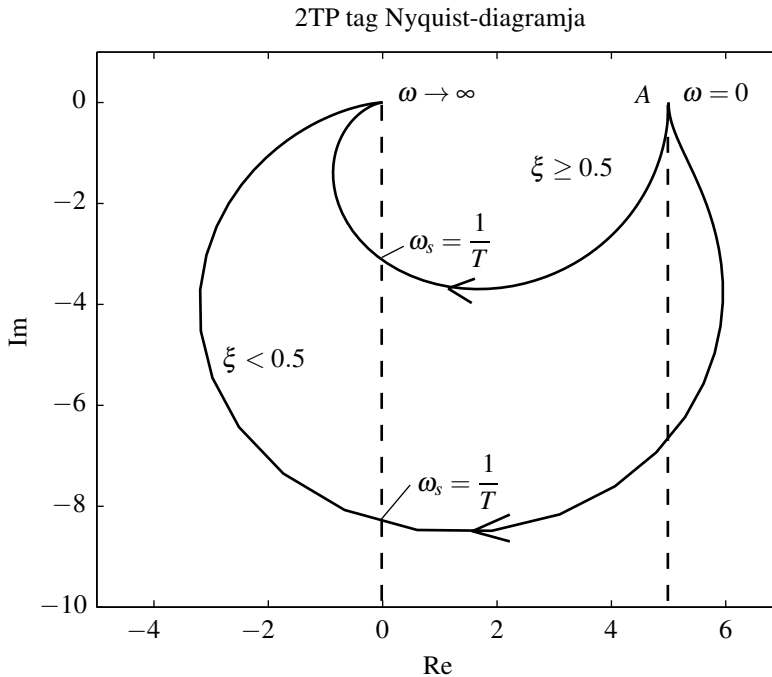
Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = \frac{A}{T^2(i\omega)^2 + 2T\xi i\omega + 1} = \frac{A(1 - T^2\omega^2 - 2T\xi i\omega)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2}$$

$$= \frac{A - AT^2\omega^2 - 2AT\xi i\omega}{T^4\omega^4 + (4T^2\xi^2 - 2T^2)\omega^2 + 1},$$

$$\xi = 0,8 \quad G(i\omega) = \frac{5}{4(i\omega)^2 + 3,2i\omega + 1},$$

$$\xi = 0,3 \quad G(i\omega) = \frac{5}{4(i\omega)^2 + 1,2i\omega + 1}.$$



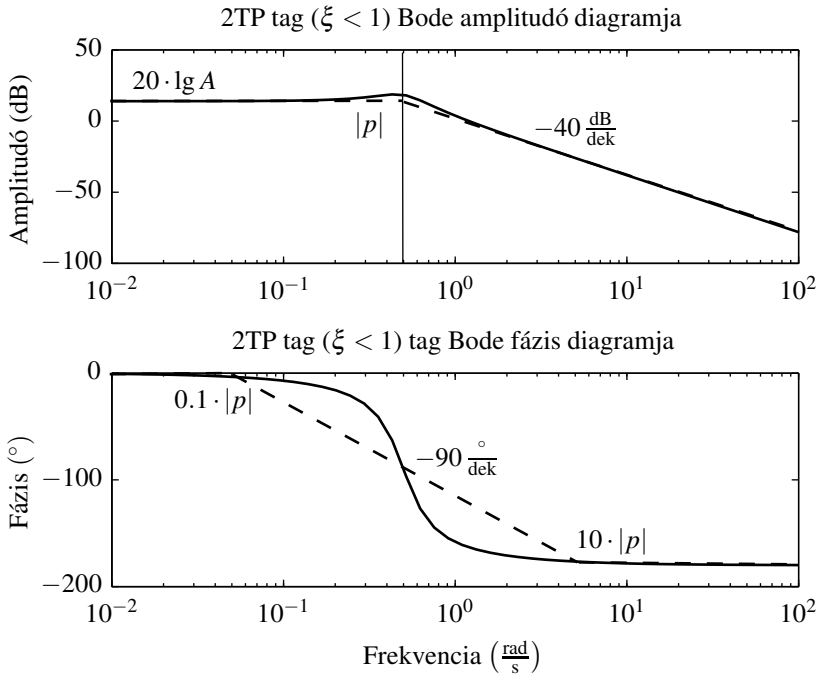
C.13. ábra. 2TP alaptag Nyquist-diagramja

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

$$\begin{aligned}\omega = 0 &\Rightarrow G(i0) = A, \\ \omega \rightarrow \infty &\Rightarrow G(i\infty) = 0, \\ \omega_s = \frac{1}{T} &\Rightarrow G\left(i\frac{1}{T}\right) = \frac{A - A - 2A\xi i}{4\xi^2} = 0 - \frac{2A\xi i}{4\xi^2}.\end{aligned}$$

A fenti kifejezésben ω_s az úgynevezett sarokfrekvencia, itt a frekvenciafüggvény értéke tisztán képzetes $\varphi(\omega_s) = -90^\circ$. A tag Nyquist-diagramja egy torz „félkör” az alsó két síknyegyben A-ból 0-ba (ahány tárolás a tag, annyi síknyegyden halad át a Nyquist-diagramja) (lásd C.13 ábra). Bizonyítható (lásd C.3 alfejezet), hogy az A pontba húzott függőleges egyenest $\xi < 0.5$ csillapítás esetén fogja a diagram kétszer metszeni (ekkor „lóg át”

422 C. Alaptagok Nyquist- és Bode-diagramjai

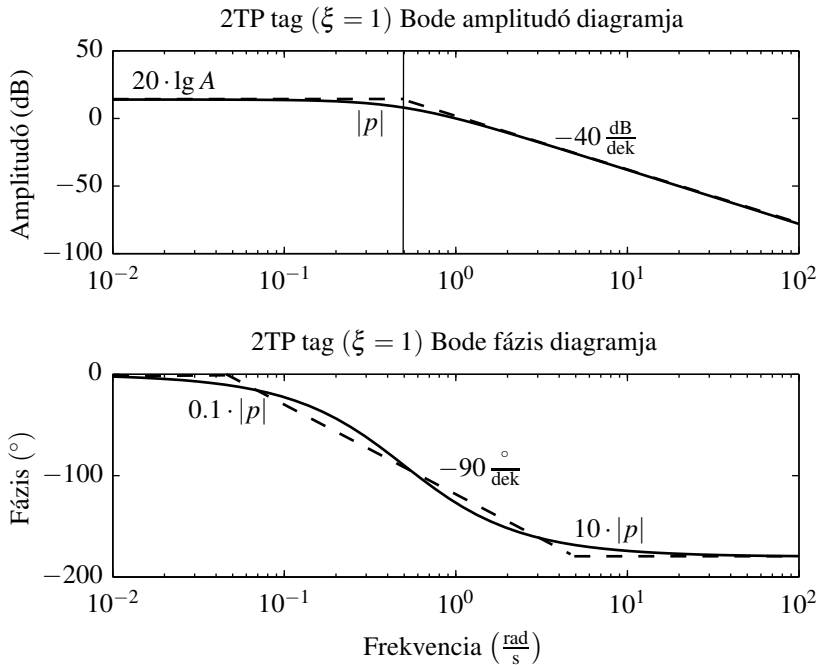


C.14. ábra. 2TP alaptag Bode-diagramja

rajta jobbra) egyébként minden pontja az egyenesen, vagy annak bal oldalán helyezkedik el.

A kéttárolós tagok esetében a rendszer viselkedését a ξ csillapítási tényező befolyásolja, három esetet különböztetünk meg (tipikus kéttárolós tag az egytömegű csillapított lengőrendszer):

- $\xi < 1$ a rendszer gyengén csillapított, ekkor a rendszernek komplex konjugált póluspárja van,
- $\xi = 1$ esetén a rendszer aperiodikus-periodikus határhelyzetben van, a rendszernek egy darab kétszeres multiplicitású valós pólusa van (kritikus csillapítás),
- $\xi > 1$ esetén a rendszer túlcillapított, két eltérő valós pólusa van ($|p_1| < |p_2|$).



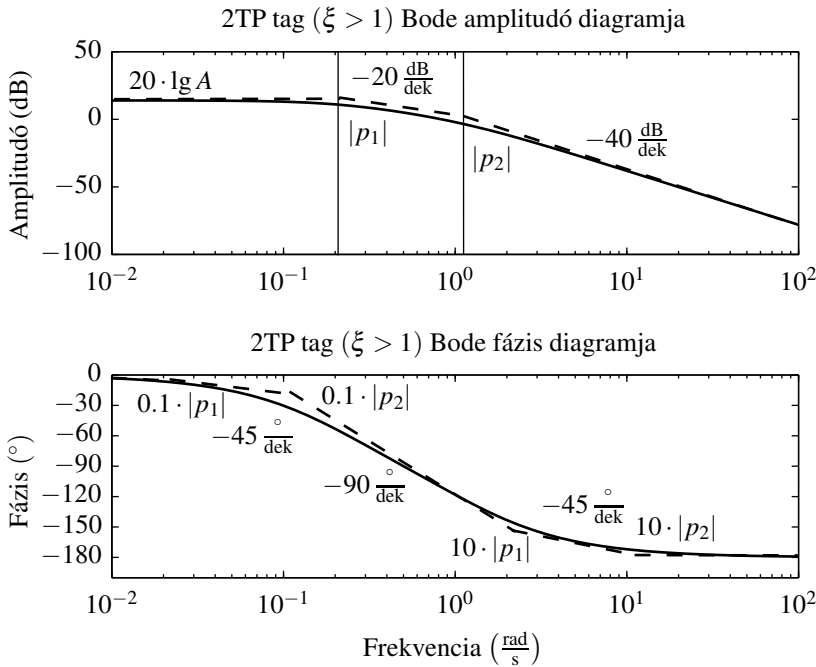
C.15. ábra. 2TP alaptag Bode-diagramja

A kéttárolós tagok Bode-diagramjait szorzatra bontással és az alaptagok ábrázolása utáni eredő számítással kaphatjuk meg.

A pólusok alapján a 2TP aszimptotikus Bode-diagramokról a következőket mondhatjuk:

- – Komplex konjugált póluspár vagy kétszeres multiplicitású valós pólus esetén az amplitúdó diagram $20 \cdot \lg(A)$ erősítésű vízszintes egyenes az $|p_1| = |p_2| = |p|$ frekvenciáig, majd onnan $-40 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes.
- A fázisfüggvény 0° és -180° között forog: 0° a $0.1|p|$ frekvenciánál kisebb frekvenciákra, $-90 \frac{^\circ}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes $0.1|p|$ és $10|p|$ frekvenciák között és -180° $10|p|$ -nél nagyobb frekvenciák esetén (lásd C.14, C.15, C.16 ábrák). Látható, hogy

424 C. Alaptagok Nyquist- és Bode-diagramjai



C.16. ábra. 2TP alaptag Bode-diagramja

$\omega_s = 1/T$ frekvencián a Bode fázis diagram a Nyquist-diagrammal megegyezően éppen -90° értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.

- A valós Bode amplitúdó diagramon a $|p|$ frekvencián kiemelés található gyengén csillapított esetben. Határeset a $\xi = 0$ csillapítatlan rendszer ahol az $\omega_s = |p|$ sajátlenngési (vagy sarok-) frekvencián végtelen nagy amplitúdó és ezért végtelen nagy kiemelés alakul ki.
- – Két valós pólus esetén az amplitúdó diagram $20 \cdot \lg(A)$ erősítési vízszintes egyenes az $|p_1|$ frekvenciáig, majd onnan $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes a $|p_2|$ frekvenciáig. $|p_2|$ frekvenciától pedig $-40 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes.

- A fázisfüggvény 0° és -180° között forgat: 0° a $0.1|p_1|$ frekvenciánál kisebb frekvenciákra, $-45 \frac{\circ}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes $0.1|p_1|$ és $0.1|p_2|$ frekvenciák között, $-90 \frac{\circ}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes $0.1|p_2|$ és $10|p_1|$ frekvenciák között, $-45 \frac{\circ}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes $10|p_1|$ és $10|p_2|$ frekvenciák között, és -180° $10|p_2|$ -nél nagyobb frekvenciák esetén (lásd C.14, C.15, C.16 ábrák). Látható, hogy $\omega_s = 1/T$ frekvencián a Bode fázisdiagram a Nyquist-diagrammal megegyezően éppen -90° értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.

2TD 2 tárolás differenciáló tag

Átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{A_d s}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}.$$

Frekvenciafüggvénye:

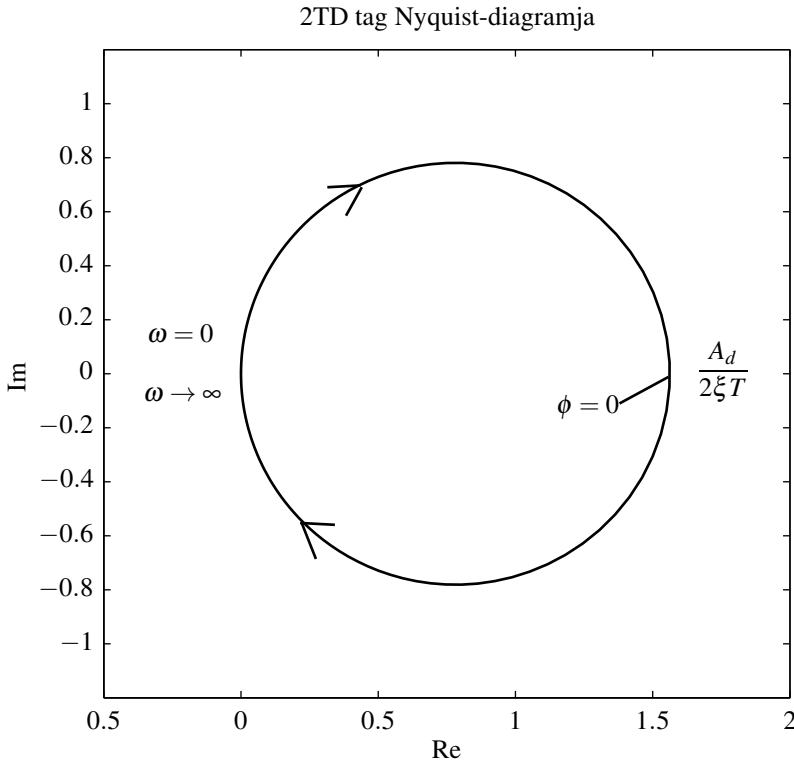
$$\begin{aligned} G(i\omega) &= \frac{A_d i\omega}{T^2 (i\omega)^2 + 2T\xi i\omega + 1} = \frac{A_d i\omega(1 - T^2\omega^2 - 2T\xi i\omega)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2} \\ &= \frac{(1 - T^2\omega^2)A_d i\omega + 2A_d T\xi\omega^2}{T^4\omega^4 + (4T^2\xi^2 - 2T^2)\omega^2 + 1}, \\ \xi &= 0.8 \quad G(i\omega) \\ &= \frac{5i\omega}{4(i\omega)^2 + 3,2i\omega + 1}. \end{aligned}$$

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = 0,$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = 0,$$

$$\omega_s = \frac{1}{T} \Rightarrow G\left(i\frac{1}{T}\right) = \frac{0 + \frac{2A_d\xi}{T}}{4\xi^2} = \frac{A_d}{2\xi T} + 0i.$$

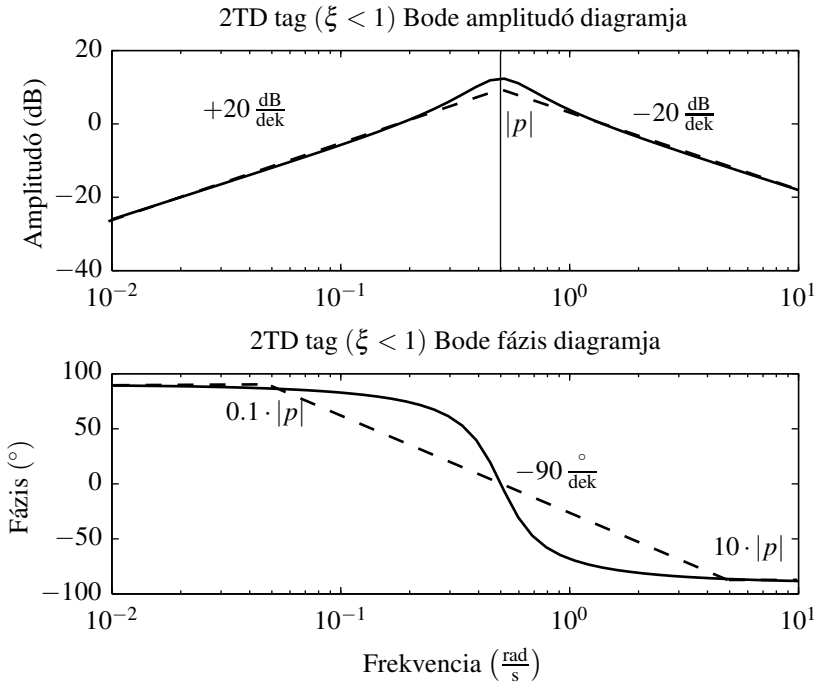


C.17. ábra. 2TD alaptag Nyquist-diagramja

A fenti kifejezésben ω_s az úgynevezett sarokfrekvencia, itt a frekvenciafüggvény értéke tisztán valós ($\varphi(\omega_s) = 0$). A tag Nyquist-diagramja egy teljes kör a felső és alsó két síknegyedben 0-ból 0-ba (ahány tárolás a tag, annyi síknegyeden halad át a Nyquist-diagramja) (lásd C.17 ábra). A teljes kör alak igazolása a C.3 alfejezetben megtalálható.

A pólusok alapján a 2TD aszimptotikus Bode-diagramokról a következőket mondhatjuk:

- – Komplex konjugált póluspár vagy egy darab kétszeres multiplícitású pólus esetén az amplitúdó diagram $+20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes az $|p_1| = |p_2|$ frekvenciáig (mely 0 dB-es tengelyt

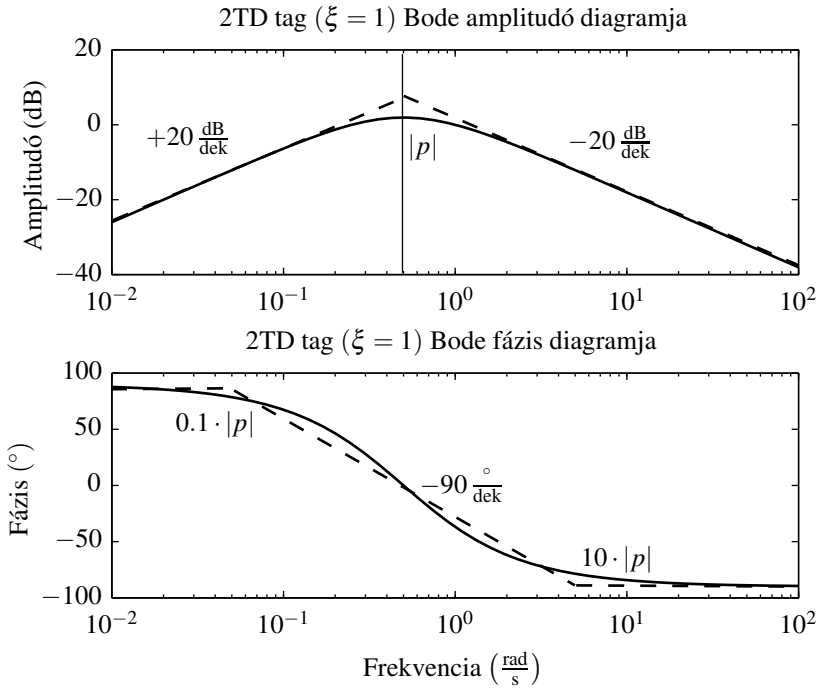


C.18. ábra. 2TD alaptag Bode-diagramja

az $\frac{1}{A_d}$ frekvencián metszi), majd onnan $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes. A 0 dB-es tengellyel való metsződés az $\frac{1}{T}$ és $\frac{1}{A_d}$ frekvenciák viszonyától függ. Ha $\frac{1}{T} > \frac{1}{A_d}$ akkor létrejön a metsződés, ha $\frac{1}{T} < \frac{1}{A_d}$ akkor nem jön létre metsződés.

- A fázisfüggvény 90° és -90° között forog: 90° a $0.1|p|$ frekvenciánál kisebb frekvenciákra, -90° meredekségű egyenes $0.1|p|$ és $10|p|$ frekvenciák között és -90° $10|p|$ -nél nagyobb frekvenciák esetén (lásd C.18, C.19, C.20 ábrák). Látható, hogy

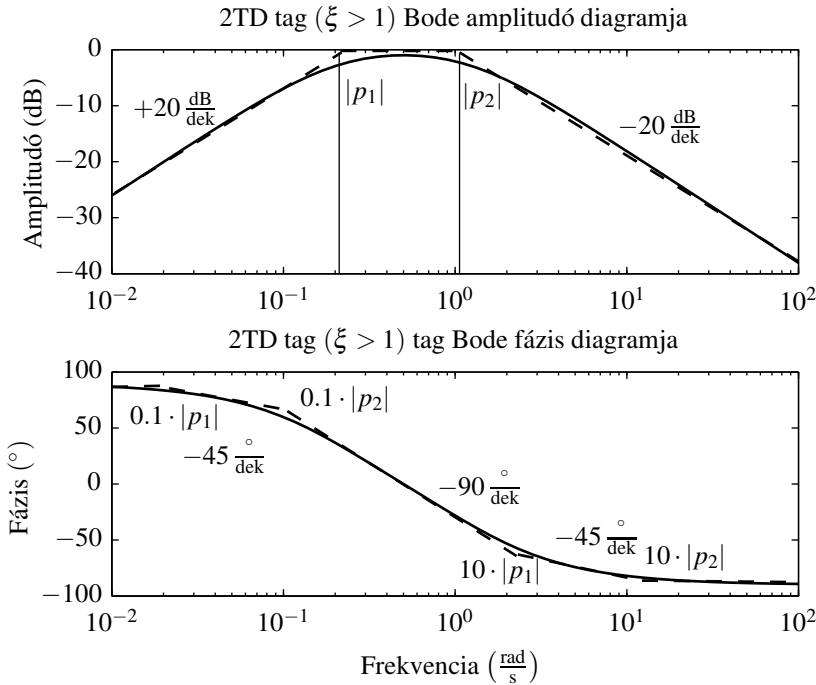
428 C. Alaptagok Nyquist- és Bode-diagramjai



C.19. ábra. 2TD alaptag Bode-diagramja

$\omega_s = \frac{1}{T}$ frekvencián a Bode fázis diagram a Nyquist-diagrammal megegyezően éppen 0° értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.

- A valós Bode amplitúdó diagramon a $|p|$ frekvencián kiemelés található gyengén csillapított esetben. Határeset a $\xi = 0$ csillapítatlan rendszer ahol az $\omega_s = |p|$ sajátlengési (vagy sarok) frekvencián végtelen nagy amplitúdó és ezért végtelen nagy kiemelés alakul ki.
- – Két valós pólus esetén az amplitúdó diagram $+20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes az $|p_1|$ frekvenciáig (mely 0 dB-es tengelyt az $\frac{1}{A_d}$ frekvencián metszi), majd onnan vízszintes egyenes a $|p_2|$ frek-



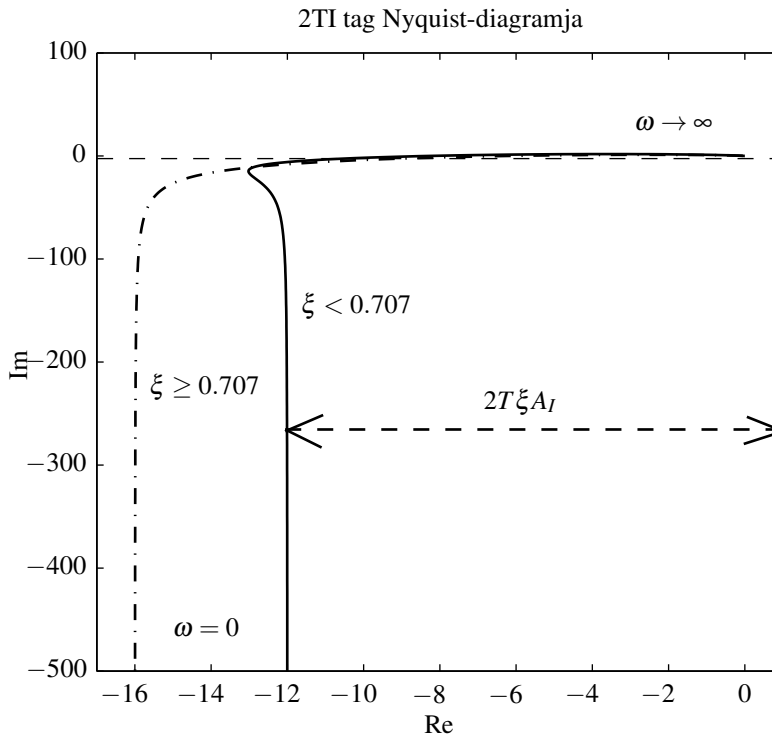
C.20. ábra. 2TD alaptag Bode-diagramja

venciáig. $|p_2|$ frekvenciától pedig $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes. A 0 dB -es tengellyel való metsződés az $|p_1|$ és $\frac{1}{A_d}$ frekvenciák viszonyától függ. Ha $|p_1| > \frac{1}{A_d}$ akkor létrejön a metsződés, ha $|p_1| < \frac{1}{A_d}$ akkor nem jön létre metsződés.

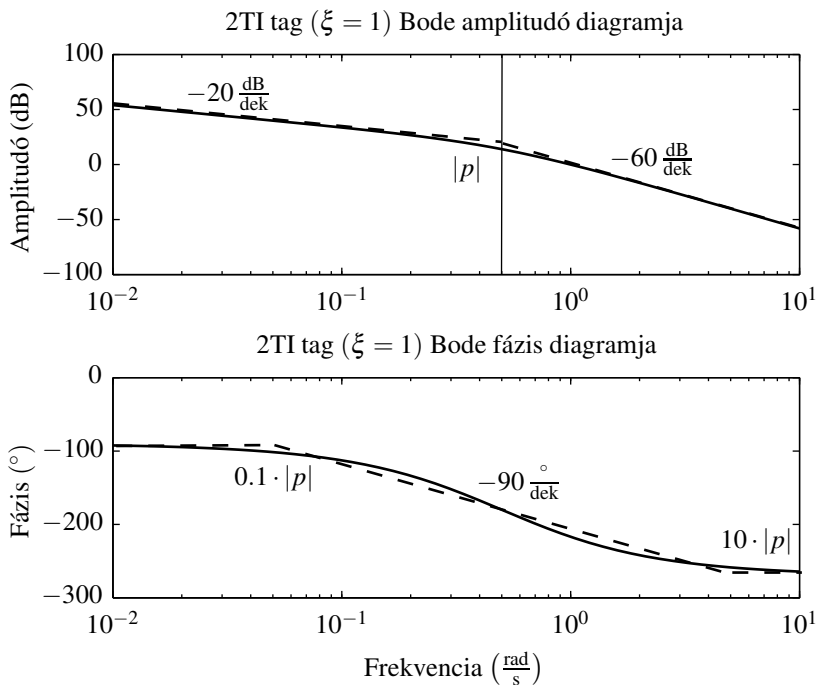
- A fázisfüggvény 90° és -90° között forog: 90° a $0.1|p_1|$ frekvenciánál kisebb frekvenciákra, $-45 \frac{^\circ}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes $0.1|p_1|$ és $0.1|p_2|$ frekvenciák között, $-90 \frac{^\circ}{\text{dek}}$ meredekségű egye-

nes $0.1|p_2|$ és $10|p_1|$ frekvenciák között, $-45 \frac{\circ}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes $10|p_1|$ és $10|p_2|$ frekvenciák között, és -90° $10|p_2|$ -nél nagyobb frekvenciák esetén (lásd C.18, C.19, C.20 ábrák). Látható, hogy $\omega_s = \frac{1}{T}$ frekvencián a Bode fázis diagram a Nyquist-diagrammal megegyezően éppen 0° értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.

2TI 2 tárolós integráló tag



C.21. ábra. 2TI alaptag Nyquist-diagramja

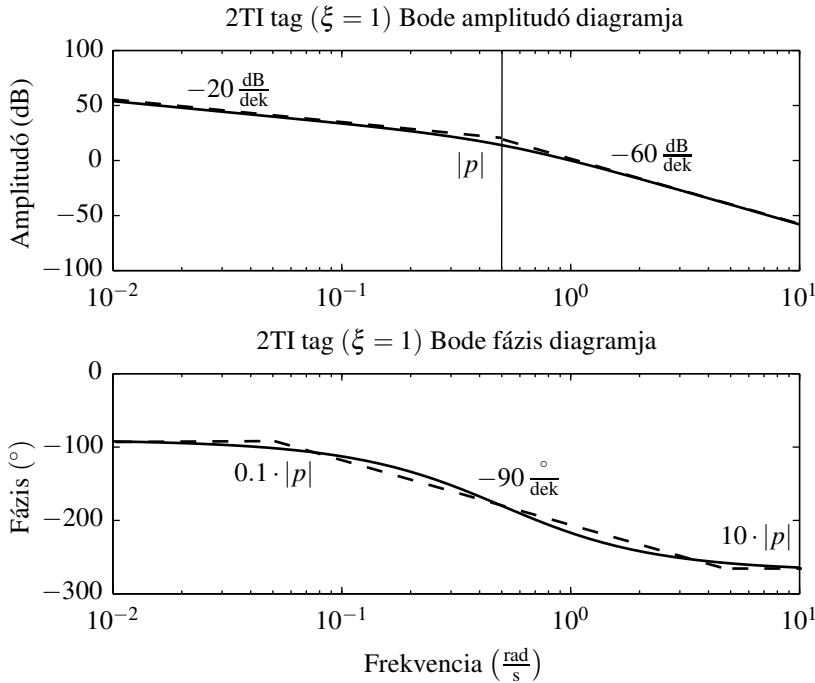


C.22. ábra. 2TI alaptag Bode-diagramja

Átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{A_I}{s(T^2s^2 + 2T\xi s + 1)}$$

432 C. Alaptagok Nyquist- és Bode-diagramjai



C.23. ábra. 2TI alaptag Bode-diagramja

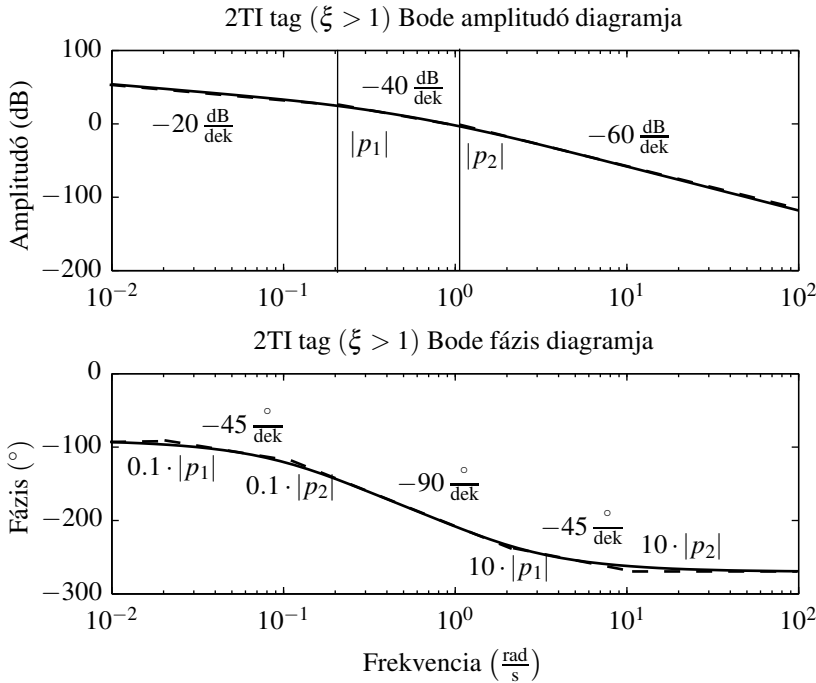
Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = \frac{A_I}{T^2(i\omega)^3 + 2T\xi(i\omega)^2 + i\omega} = \frac{A_I(-2T\xi\omega^2 - i\omega + T^2i\omega^3)}{4T^2\xi^2\omega^4 + \omega^2 - 2T^2\omega^4 + T^4\omega^6}$$

$$= \frac{-2T\xi A_I - \frac{A_I}{\omega} + T^2 A_I \omega i}{4T^2\xi^2\omega^2 + 1 - 2T^2\omega^2 + T^4\omega^4},$$

$$G(i\omega)|_{\xi=0.8} = \frac{5}{4(i\omega)^3 + 3.2(i\omega)^2 + i\omega},$$

$$G(i\omega)|_{\xi=0.6} = \frac{5}{4(i\omega)^3 + 2.4(i\omega)^2 + i\omega}.$$



C.24. ábra. 2TI alaptag Bode-diagramja

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = -2TA_I\xi - i\infty,$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = 0,$$

$$\omega_s = \frac{1}{T} \Rightarrow G\left(i\frac{1}{T}\right) = \frac{-2TA_I\xi + i(TA_I - TA_I)}{4\xi^2} = \frac{-TA_I}{2\xi} + 0i$$

A fenti kifejezésben ω_s az úgynevezett sarokfrekvencia, itt a frekvenciafüggvény értéke tisztán valós ($\varphi(\omega_s) = -180^\circ$). A tag Nyquist-diagramja az 1TI tag diagramjának torzítása (két síknyedven halad át) $2TA_I\xi$ értékkel jellemzett aszimptotával (lásd C.21 ábra). Bizonyítható (lásd C.3 alfejezet), hogy a $2TA_I\xi$ pontba húzott függőleges egyenest $\xi < 1/\sqrt{2}$ csillapítás esetén fogja a diagram kétszer metszeni (ekkor „lóg át” rajta balra) egyébként minden pontja az egyenesen, vagy annak jobb oldalán helyezkedik el.

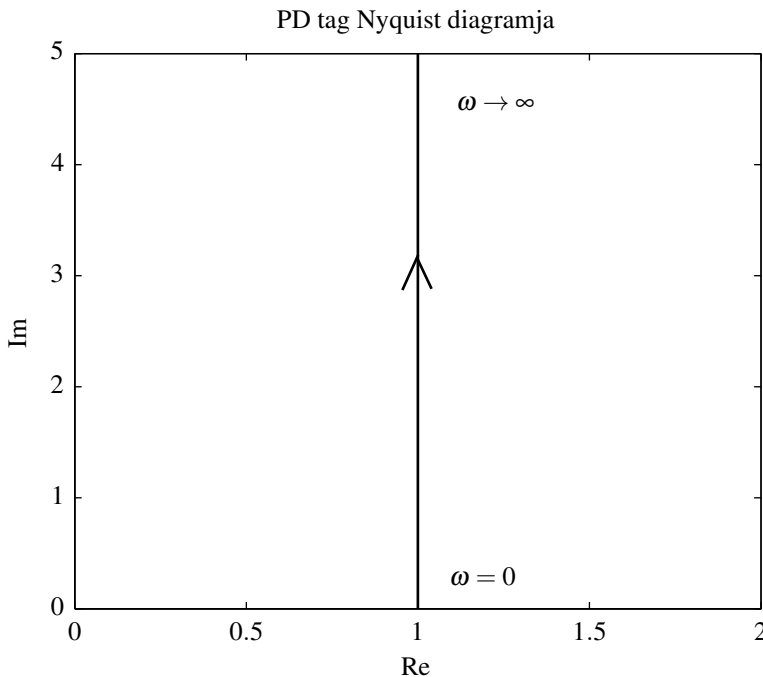
434 C. Alaptagok Nyquist- és Bode-diagramjai

A pólusok alapján az 1TI aszimptotikus Bode diagramokról a következőket mondhatjuk:

- – Komplex konjugált póluspár vagy egy darab kétszeres multiplisitású pólus esetén az amplitúdó diagram $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes az $|p_1| = |p_2| = |p|$ frekvenciáig, majd onnan $-60 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes. A 0 dB-es tengellyel való metsződés a $|p|$ és A_I frekvenciák viszonyától függ. Ha $|p| > A_I$, akkor $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$, egyéb esetben $-60 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekséggel metszi a görbe a 0dB-es tengelyt.
- A fázisfüggvény -90° és -270° között forog: -90° a $0.1|p|$ frekvenciánál kisebb frekvenciákra, -90° meredekségű egyenes $0.1|p|$ és $10|p|$ frekvenciák között és -270° $10|p|$ -nél nagyobb frekvenciák esetén (lásd C.22, C.23, C.24 ábrák). Látható, hogy $\omega_s = \frac{1}{T}$ frekvencián a Bode fázisdiagram a Nyquist diagrammal megegyezően éppen -180° értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.
- A valós Bode amplitúdó diagramon a $|p|$ frekvencián kiemelés található gyengén csillapított esetben.
- – Két valós pólus esetén az amplitúdó diagram $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes az $|p_1|$ frekvenciáig, majd onnan $-40 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes a $|p_2|$ frekvenciáig. $|p_2|$ frekvenciától pedig $-60 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes. A 0 dB-es tengellyel való metsződés a $|p_1|$ és A_I frekvenciák viszonyától függ. Ha $|p_1| > A_I$, akkor $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$, egyéb esetben $-40 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ vagy $-60 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekséggel metszi a görbe a 0 dB-es tengelyt.
- A fázisfüggvény -90° és -270° között forog: -90° a $0.1|p_1|$ frekvenciánál kisebb frekvenciákra, -45° meredekségű egye-

nes $0.1|p_1|$ és $0.1|p_2|$ frekvenciák között, $-90\frac{\circ}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes $0.1|p_2|$ és $10|p_1|$ frekvenciák között, $-45\frac{\circ}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes $10|p_1|$ és $10|p_2|$ frekvenciák között, és $-270\frac{\circ}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes $10|p_2|$ -nél nagyobb frekvenciák esetén (lásd C.22, C.23, C.24 ábrák). Látható, hogy $\omega_s = \frac{1}{T}$ frekvencián a Bode fázis diagram a Nyquist-diagrammal megegyezően éppen $-180\frac{\circ}{\text{dek}}$ értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.

PD arányos deriváló tag

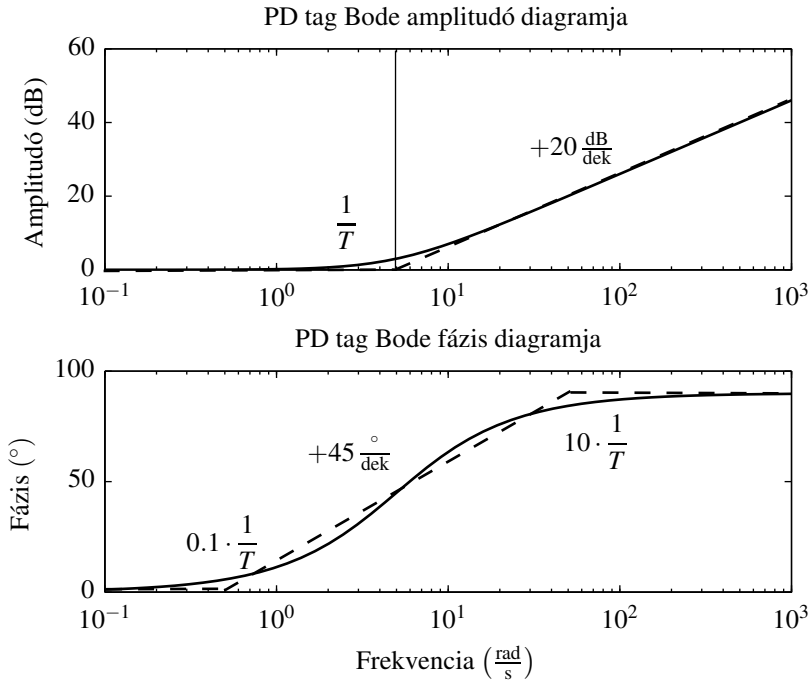


C.25. ábra. PD alaptag Nyquist-diagramja

Átviteli függvénye:

$$G(s) = Ts + 1.$$

436 C. Alaptagok Nyquist- és Bode-diagramjai



C.26. ábra. PD alaptag Bode-diagramja

Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = Ti\omega + 1.$$

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = 1,$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = 1 + i\infty,$$

$$\omega_s = \frac{1}{T} \Rightarrow G\left(i\frac{1}{T}\right) = i + 1.$$

A fenti kifejezésben ω_s az úgynevezett sarokfrekvencia, itt $\varphi(\omega_s) = 45^\circ$. A tag Nyquist-diagramja egy egyenes az 1 pontból az $1 + i\infty$ -be (lásd C.25 ábra).

A PD tag Bode amplitúdó diagramja $\omega_s = \frac{1}{T}$ frekvenciáig egy 0 dB magasságban haladó vízszintes egyenes, majd a sarokkőrfrekvenciától $+20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes. Fázisdiagramja 0° a sarokkőrfrekvencia tizedénél kisebb frekvenciákra, $+45 \frac{\circ}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes $0.1\omega_s$ és $10\omega_s$ frekvenciák között és $+90^\circ$ a sarokkőrfrekvencia tízszeresénél nagyobb frekvenciák esetén (lásd C.26 ábra). Az alak igazolása a C.3 alfejezetben található.

C.3. Bizonyítások

Igazolás: Összetett tag Bode-diagramja szorzat alakból a szorzatban szereplő alaptagok Bode-diagramjainak összegeként kapható meg

Vegyük egy összetett tag alaptagok szorzataként felírt frekvenciafüggvényét:

$$G(i\omega_0) = G_1 G_2 \dots G_n, \quad (\text{C.7})$$

$$G_j \in \mathbb{C} \quad j = 1 \dots n \Rightarrow, \quad (\text{C.8})$$

$$G_j = r_j e^{i\varphi_j} \Rightarrow, \quad (\text{C.9})$$

$$G(i\omega_0) = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} \dots r_n e^{i\varphi_n} = r_1 r_2 \dots r_n e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} \dots e^{i\varphi_n} = r e^{i\varphi}. \quad (\text{C.10})$$

Az eredő amplitúdó így $r = r_1 r_2 \dots r_n$ az eredő fázis pedig $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$. A fázisszögről így azonnal látható, hogy az alaptagok fázisszögeit összegezve megkapjuk az eredő szöget.

Vizsgáljuk most a Bode amplitúdó diagram értékét felhasználva az amplitúdó definícióját:

$$a(\omega_0) = 20 \cdot \lg |G(i\omega_0)| = 20 \cdot \lg |r_1 r_2 \dots r_n e^{i\varphi}| = \quad (\text{C.11})$$

$$= 20 \cdot \lg (r_1 r_2 \dots r_n) = 20 \cdot \lg r_1 + 20 \cdot \lg r_2 + \dots + 20 \cdot \lg r_n = \quad (\text{C.12})$$

$$= a_1(\omega_0) + a_2(\omega_0) + \dots + a_n(\omega_0). \quad (\text{C.13})$$

Tehát az alaptagok amplitúdóinak összegét kaptuk.

Igazolás: 0TD alaptag Bode diagramja

Az ideális differenciáló tag erősítését a következő módon írhatjuk:

$$a(\omega) = 20 \cdot \lg |A_d i\omega| = 20 \cdot \lg(A_d \omega) = 20 \cdot \lg A_d + 20 \cdot \lg \omega.$$

438 C. Alaptagok Nyquist- és Bode-diagramjai

Amennyiben a körfrekvencia egy dekádnyit változik akkor az erősítés változása:

$$a(10 \cdot \omega) - a(\omega) = 20 \cdot \lg A_d + 20 \cdot \lg 10 + 20 \cdot \lg \omega - 20 \cdot \lg A_d - 20 \cdot \lg \omega = \\ = 20 \cdot \lg 10 = 20.$$

vagyis az amplitúdó görbe meredeksége $+20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$. A vágási körfrekvencia:

$$0 = 20 \cdot \lg A_d + 20 \cdot \lg \omega_c,$$

$$\lg \omega_c = -\lg A_d = \lg A_d^{-1},$$

$$\omega_c = \frac{1}{A_d}.$$

A fázisfüggvény:

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{\text{Im} G(i\omega)}{\text{Re} G(i\omega)} = \text{arctg} \frac{\text{Im} A_d i \omega}{\text{Re} A_d i \omega} \\ = \text{arctg} \frac{A_d \omega}{0} = \text{arctg} \infty = +90^\circ.$$

minden ω -ra.

Igazolás: 0TI alaptag Bode diagramja

Az ideális integráló tag erősítését (hasonlóan a differenciálóhoz) a következő módon írhatjuk:

$$a(\omega) = 20 \cdot \lg \left| \frac{A_I}{\omega} \right| = 20 \cdot \lg \frac{A_I}{\omega} = 20 \cdot \lg A_I - 20 \cdot \lg \omega.$$

Amennyiben a körfrekvencia egy dekádnyit változik akkor az erősítés változása:

$$a(10 \cdot \omega) - a(\omega) = 20 \cdot \lg A_I - 20 \cdot \lg 10 - 20 \cdot \lg \omega - 20 \cdot \lg A_I + 20 \cdot \lg \omega \\ = -20 \cdot \lg 10 = -20.$$

vagyis az amplitúdó görbe meredeksége $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$. A vágási körfrekvencia:

$$0 = 20 \cdot \lg A_I - 20 \cdot \lg \omega_c,$$

$$\lg \omega_c = \lg A_I,$$

$$\omega_c = A_I$$

A fázisfüggvény:

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} G(i\omega)}{\operatorname{Re} G(i\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \frac{-A_I i}{\omega}}{\operatorname{Re} \frac{-A_I i}{\omega}} \\ &= \operatorname{arctg} \frac{-A_I}{0} = -\operatorname{arctg} \infty = -90^\circ\end{aligned}$$

minden frekvencián.

Igazolás: 1TP alaptag Nyquist diagramja félkör alakú

Thálesz tétele értelmében egy kör átmérője fölé rajzolt háromszögek, melyek harmadik csúcsa a körön helyezkedik el mindig derékszögűek. Mi ezt a tételt fordítva fogjuk alkalmazni és belátjuk, hogy adott Nyquist diagram esetén a futó pont (ω) és a kezdő- ($\omega = 0$) és végpont ($\omega \rightarrow \infty$) által alkotott háromszögek derékszögűek, így a futó pont félkört (teljes kört) fut be.

Jelölje a futó pont valós és képzetes részből képzett vektorát a komplex számsíkon \underline{G} . \underline{A} pedig az $\omega = 0$ ponthoz tartozó vektort. Azt szükséges belátni, hogy a \underline{G} vektor a \underline{GA} különbségi vektorra mindig merőleges. Ez akkor áll fenn, ha skalár szorzatuk nulla.

$$\begin{aligned}\underline{G} &= \left[\frac{A}{N} \quad \frac{-AT\omega}{N} \right]^T, \\ N &= 1 + T^2\omega^2, \\ \underline{A} &= [A \quad 0]^T, \\ \underline{GA} &= \underline{A} - \underline{G} = \left[A - \frac{A}{N} \quad \frac{AT\omega}{N} \right]^T, \\ \underline{GA} \cdot \underline{G} &= \frac{A^2}{N} - \frac{A^2}{N^2} - \frac{A^2 T^2 \omega^2}{N^2} = \frac{A^2 N}{N^2} - \frac{A^2 + A^2 T^2 \omega^2}{N^2} = \\ &= \frac{A^2 + A^2 T^2 \omega^2}{N^2} - \frac{A^2 + A^2 T^2 \omega^2}{N^2} = 0 \quad \forall \omega, \\ &\text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Igazolás: 1TP alaptag Bode amplitúdó diagramja

Az 1TP tag amplitúdó függvénye:

$$a(\omega) = 20 \cdot \lg \left| \frac{A}{Ti\omega + 1} \right| = 20 \cdot \lg A - 20 \cdot \lg \sqrt{1 + (T\omega)^2},$$

ami alacsony frekvenciák esetén, azaz amikor a gyök alatti kifejezésben a frekvencia függés elhanyagolható: $\omega \ll \frac{1}{T}$, $1 + (T\omega)^2 \approx 1$:

$$a(\omega)|_{\omega \ll \frac{1}{T}} = 20 \cdot \lg A,$$

az aszimptota egyenlete. Magas frekvenciák esetén, mikor is a gyök alatti kifejezésben az 1 elhanyagolható, $\omega \gg \frac{1}{T}$, $1 + (T\omega)^2 \approx (T\omega)^2$:

$$a(\omega)|_{\omega \gg \frac{1}{T}} = 20 \cdot \lg A - 20 \cdot \lg(T\omega),$$

az aszimptota egyenlete, ami egy $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes. A két aszimptota metszéspontját meghatározó egyenlet:

$$20 \cdot \lg A = 20 \cdot \lg A - 20 \cdot \lg(T\omega),$$

amiből $\omega_s = \frac{1}{T}$ adódik.

Igazolás: 1TD alaptag Nyquist diagramja félkör alakú

Az igazolás elve azonos az 1TP tagra vonatkozóval. Jelölje a futó pont valós és képzetes részből képzett vektorát a komplex számsíkon \underline{G} . \underline{A} pedig az $\omega \rightarrow \infty$ ponthoz tartozó vektort. Azt szükséges belátni, hogy a \underline{G} vektor a \underline{GA} különbségi vektorra mindig merőleges:

$$\underline{G} = \left[\frac{A_d T \omega^2}{N}, \frac{A_d \omega}{N} \right]^T,$$

$$N = 1 + T^2 \omega^2,$$

$$\underline{A} = \left[\frac{A_d}{T}, 0 \right]^T,$$

$$\underline{GA} = \underline{A} - \underline{G} = \left[\frac{A_d}{T} - \frac{A_d T \omega^2}{N}, -\frac{A_d \omega}{N} \right]^T,$$

$$\underline{GA} \cdot \underline{G} = \frac{A_d^2 \omega^2}{N} - \frac{A_d^2 T^2 \omega^4}{N^2} - \frac{A_d^2 \omega^2}{N^2} = \frac{A_d^2 \omega^2 N}{N^2} - \frac{A_d^2 \omega^2 + A_d^2 T^2 \omega^4}{N^2} =$$

$$= \frac{A_d^2 \omega^2 + A_d^2 T^2 \omega^4}{N^2} - \frac{A_d^2 \omega^2 + A_d^2 T^2 \omega^4}{N^2} = 0 \forall \omega,$$

q.e.d.

Igazolás: 2TP alaptag Nyquist diagramjának viszonya az A ponttal jellemzett függőleges egyeneshez ξ függvényében

A 2TP tag Nyquist diagramja akkor „lóg át” az $[A \ 0]$ pontba állított függőleges egyenesen, ha $ReG(i\omega) = A$ lehetséges $\omega \neq 0$ esetén is. Az erre vonatkozó számítás:

$$A = \frac{A - AT^2 \omega^2}{T^4 \omega^4 + (4T^2 \xi^2 - 2T^2) \omega^2 + 1}, \quad (C.14)$$

$$AT^4 \omega^4 + (4AT^2 \xi^2 - 2AT^2) \omega^2 + A = A - AT^2 \omega^2 \quad a \triangleq \omega^2 > 0, \quad (C.15)$$

$$AT^4 a^2 + (4AT^2 \xi^2 - AT^2) a = 0, \quad (C.16)$$

$$AT^4 a = AT^2 - 4AT^2 \xi^2, \quad (C.17)$$

$$a = \frac{1}{T^2} - \frac{4}{T^2} \xi^2. \quad (C.18)$$

Könnyen belátható, hogy (C.14)-nek akkor létezik $a > 0$ megoldása, ha $\xi < 0,5$. Ezzel igazoltuk, hogy ekkor fog a Nyquist-diagram „átlógni” az A pontba húzott függőlegesen.

Igazolás: 2TI alaptag Nyquist diagramjának viszonya a $-2A_I T \xi$ ponttal jellemzett függőleges egyeneshez ξ függvényében

A 2TI tag Nyquist diagramja akkor „lóg át” a $[-2A_I T \xi \ 0]$ pontba állított függőleges egyenesen, ha $ReG(i\omega) = -2A_I T \xi$ lehetséges $\omega \neq 0$ esetén is. Az erre vonatkozó számítás (hasonlóan a 2TP taghoz):

$$-2A_I T \xi = \frac{-2A_I T \xi}{T^4 \omega^4 + (4T^2 \xi^2 - 2T^2) \omega^2 + 1}, \quad (C.19)$$

$$T^4 \omega^4 + (4T^2 \xi^2 - 2T^2) \omega^2 = 0 \quad a \triangleq \omega^2 > 0, \quad (C.20)$$

$$T^4 a^2 = 2T^2 a - 4T^2 \xi^2 a, \quad (C.21)$$

$$a = \frac{2}{T^2} - \frac{4}{T^2} \xi^2. \quad (C.22)$$

Könnyen belátható, hogy (C.19)-nak akkor létezik $a > 0$ megoldása, ha $\xi < 1/\sqrt{2}$. Ezzel igazoltuk, hogy ekkor fog a Nyquist-diagram „átlógni” a $-2A_I T \xi$ pontba húzott függőlegesen.

Igazolás: 2TD alaptag Nyquist diagramja kör alakú

Az igazolás elve azonos az 1TP tagra vonatkozóéval. Jelölje a futó pont valós és képzetes részből képzett vektorát a komplex számsíkon \underline{G} . \underline{A} pedig az $\omega_s = 1/T$ sarokfrekvenciához tartozó vektort. Azt szükséges belátni, hogy a \underline{G} vektor a \underline{GA} különbségi vektorra mindig merőleges:

$$\underline{G} = \left[\frac{2T\xi\omega^2 A_d}{N}, \frac{(1-T^2\omega^2)A_d\omega}{N} \right]^T,$$

$$N = T^4\omega^4 + (4T^2\xi^2 - 2T^2)\omega^2 + 1,$$

$$\underline{A} = \left[\frac{A_d}{2\xi T}, 0 \right]^T,$$

$$\underline{GA} = \underline{A} - \underline{G} = \left[\frac{A_d}{2\xi T} - \frac{2T\xi\omega^2 A_d}{N}, -\frac{(1-T^2\omega^2)A_d\omega}{N} \right]^T,$$

$$\underline{GA} \cdot \underline{G} = \frac{2\xi T A_d^2 \omega^2}{2\xi T N} - \frac{4T^2 \xi^2 \omega^4 A_d^2}{N^2} - \frac{(1-T^2\omega^2)^2 A_d^2 \omega^2}{N^2} =$$

$$= \frac{A_d^2 \omega^2 (T^4 \omega^4 + 4T^2 \xi^2 \omega^2 - 2T^2 \omega^2 + 1)}{N^2}$$

$$- \frac{A_d^2 \omega^2 (T^4 \omega^4 + 4T^2 \xi^2 \omega^2 - 2T^2 \omega^2 + 1)}{N^2} = 0,$$

q.e.d.

Igazolás: PD alptag Bode amplitúdó diagramja

A PD tag amplitúdó függvénye:

$$a(\omega) = 20 \cdot \lg |Ti\omega + 1| = 20 \cdot \lg \sqrt{1 + (T\omega)^2},$$

ami alacsony frekvenciák esetén, azaz amikor a gyök alatti kifejezésben a frekvencia függés elhanyagolható, $\omega \ll \frac{1}{T}$, $1 + (T\omega)^2 \approx 1$:

$$a(\omega)|_{\omega \ll \frac{1}{T}} = 20 \cdot \lg 1 = 0 \text{ dB},$$

az aszimptota egyenlete. Magas frekvenciák esetén, mikor is a gyök alatti kifejezésben az 1 elhanyagolható, $\omega \gg \frac{1}{T}$, $1 + (T\omega)^2 \approx (T\omega)^2$:

$$a(\omega)|_{\omega \gg \frac{1}{T}} = 20 \cdot \lg(T\omega),$$

az aszimptota egyenlete, ami egy $+20 \frac{\text{dB}}{\text{dek}}$ meredekségű egyenes. A két aszimptota metszéspontját meghatározó egyenlet:

$$20 \cdot \lg 1 = 20 \cdot \lg(T\omega),$$

444 *C. Alaptagok Nyquist- és Bode-diagramjai*

amiből $\omega = \frac{1}{T}$ adódik.