

Előszó

Az elmúlt tíz évben rohamosan fejlődő, szimbolikus számításokra is képes matematikai programcsomagok új távlatokat nyitnak a matematika alkalmazásai, kutatása és oktatása előtt. A matematika sok területéhez segítséget nyújtó szimbolikus programcsomagok közül az egyik legnépszerűbb és legelterjedtebb a Wolfram Research Institute által létrehozott és terjesztett *Mathematica* program (néha *nyelvet* mondunk). A program megvásárlója az összesen több mint 1400 oldalnyi [3, 89] referenciakönyveket is kézhez kapja. Angolul, németül, japánul, franciául és más nyelveken már majdnem 100 könyv jelent meg különféle aspektusairól és alkalmazásairól. Magyar nyelven azonban eddig nem állt rendelkezésre rendszeres bevezető. Ennek a hiánynak a pótlásán kívül azt is célul tűztük ki, hogy viszonylag rövid terjedelemben, lehetőség szerint teljes áttekintést adjunk a nyelv lehetőségeiről, beleértve a kiegészítő csomagokat is. Azt szeretnénk, ha a matematika valamely fejezete iránt érdeklődő Olvasót a legrövidebb időn belül eljuttathatnánk oda, hogy a lehető legmagasabb szinten kapjon segítséget a programtól saját alkalmazási, kutatási és oktatási feladatainak megoldásához.

• Előzmények, olvasók, előismeretek

A *Mathematica* programcsomagot 1992-ben kezdtük el oktatni a Gödöllői Agrártudományi Egyetemen, egy évvel később pedig az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. Itt szerzett tapasztalataink alapján az Olvasó várhatóan rendelkezik elemi számítógépes ismeretekkel, és *érdeklődik a matematika alkalmazása, vagy oktatásának (számítógépek felhasználásával történő) megújítási lehetőségei*. A fizikus, geofizikus, gépészmérnök, programozó, programtervező stb. szakos egyetemistákon kívül rendszeresen találkoztunk doktoranduszokkal és fiatal egyetemi oktatókkal is a hallgatóság soraiban, köztük gyakorló biológussal, fizikussal, matematikussal, mérnökkel, vegyésszel. Az előforduló matematikai fogalmakat és tételeket csak abban az esetben ismertettük, amikor ennek szükségét éreztük. Mindezek alapján úgy gondoljuk, hogy matematikából a könyv nagy részének elolvasásához elegendő

valamilyen egy-másfél éves egyetemi kurzus elvégzése, de időnként rá fogunk mutatni azokra a lehetőségekre, amelyek a matematikust segíthetik a kutatásban.

Különleges szerepük lehet a *tanár*-olvasóknak: ők segíthetnek annak megmutatásában, hogy akár az általános iskolától kezdve lehet találni a programban felhasználásra méltó, érdekes elemeket.

• Miért a *Mathematica*?

Néhány megjegyzést teszünk a többi szimbolikus csomagról és a *Mathematica* hozzájuk való viszonyáról. Mindenekelőtt megemlítjük, hogy magyar nyelven az első ilyen programcsomagról szóló könyv a DERIVE program oktatási alkalmazásairól számolt be [79], s ez már két kiadásban is napvilágot látott. A legutóbbi időben több könyv is megjelent illetve megjelenőben van a — matematikus körökben szintén népszerű — MAPLE V programról [42, 56]. Magunk mindezt örvendetes eseménynek tekintjük, s reméljük, hogy az angol nyelvű irodalommal szemben meglévő elmaradás felszámolásához jelen munkával is hozzájárulhatunk. Azt reméljük, hogy a MAPLE V vagy a DERIVE program hűséges használója is talál ötleteket könyvünkben, ahogyan mi is vettünk más nyelvekről szóló könyvekből feladatokat, oktatási és programozási ötleteket egyaránt.

Miért éppen a *Mathematica*val foglalkozunk?

Jelenlegi ismereteink alapján úgy látjuk, hogy a matematikai programcsomagok már ma is, és a közeli jövőben még inkább képesek lesznek arra, hogy a programozással, számítástudománnyal és numerikus matematikával nem hivatásszerűen, de kényszerűen foglalkozó fizikusok, mérnökök, orvosok, vegyészek és más szakemberek *szellemi energiájának jelentős részét felszabadítsák*. Ily módon sokkal több idejük marad a megfelelő modellek felállítására, a kapott eredmények elemzésére és értelmezésére.

Felületes szemlélő számára a legnépszerűbb szimbolikus programcsomagok — mivel nyilvánvalóak és jól definiálhatóak a felhasználói igények — hasonlóan viselkednek. Jellemző, hogy az egyik program hirdetésében szereplő feladatok a másikkal általában megoldhatók. Amiben az egyik lemarad, igyekszik utolérni a másikat. A *Mathematica* például grafikai és animációs képességeivel (ideértve a hangképzést is) tűnt ki korábban, a többiek számára ebben ez a program volt a minta.

Amiben ma is kiemelkedőnek tűnik, az a különböző *programozási stílusokat* lehetővé tévő eszköztára. A többi nyelv olyannak látszik, mint egy hagyományos procedurális programozási nyelv, azzal a többlettel, hogy szimbólumokkal és tetszőlegesen nagy, illetve tetszőlegesen pontos számokkal is lehet számolni bennük. A *Mathematica*ban viszont mód van arra is, hogy

használjuk a szabályalapú és az objektumorientált programozás módszereit; végül — de talán ez a legfontosabb — a rendszer készítői és aktív használói a *funkcionális programozást* különlegesen hatékony eszközzé tették. Újra (nem először, de valószínűleg nem utoljára a számítástechnika történetében) elmondható, hogy általa lehetővé válik, hogy a felhasználónak csak a feladatot kell megfogalmaznia, mégpedig a matematika nyelvén, s a megoldás teljesen a program dolga. Természetesen nem lehet eléggé hangsúlyozni az *ellenőrzés* fontosságát, hiszen bonyolult programról (programokról) van szó.

Tegyünk néhány kritikai megjegyzést is. A *Mathematica* rendkívül *hosszú azonosítókat* használ, hogy ne kelljen a felhasználónak kitalálnia az esetleges rövidítéseket. Ízlés kérdése, hogy ezt a tényt a felhasználó hogyan viseli el. Ahhoz, hogy a programmal komolyabb *szimbolikus számításokat* lehessen végezni (ami pedig a legalapvetőbb deklarált célja az ilyen programoknak), nagyon alaposan meg kell azt ismerni. Néhány esetben egészen egyszerű feladatok megoldásaként hibás eredményt kaphatunk. Ez figyelmeztet arra, hogy az eredményeket kritikusan kell fogadnunk és érdemes többféleképpen is ellenőriznünk. Időnként az a benyomásunk, hogy egyes feladatokat csak nagyon nehézkesen lehet vele megoldani. (Például amiatt, hogy a számok alapértelmezésben komplexek.) Ennek a hátránynak az értékelésénél vegyük azonban figyelembe, hogy egyetlen gyakorló matematikusnak vagy alkalmazónak sem kell a matematika *minden* területére tekintettel lennie, elég, ha egy szűk területen viszonylag következetes elnevezéseket, jelöléseket, szokásokat alakít ki. A *Mathematica* viszont, amint Wolfram könyvének alcíme mondja, olyan rendszer, amely lehetővé teszi a számítógépes matematizálást (nem pedig az algebrai, numerikus vagy statisztikai vizsgálatokat). Ez a nagyigényű célkitűzés rengeteg olyan problémát vet fel — és a megoldások nem is olyan rosszak —, amellyel gyakorló matematikus vagy alkalmazó nem is találkozik.

• Alkalmazás, oktatás, kutatás

A matematika *alkalmazásában* (akár új területről, akár ismert eredmények oktatásáról van szó), a matematikai programcsomagok használatának jelentősége abban áll, hogy a súlypont áttevődhet a *módszerekről az esettanulmányokra*. Eddig egy-egy alkalmazási feladat megoldása rengeteg energiát emésztett föl, ma pedig ezekkel a programokkal egy-egy tanóra alatt teljes alkalmazások megoldása végigkövethető.

Az eddigiekben elsősorban matematikán kívüli alkalmazásokra gondoltunk. Reméljük azonban, hogy egyre több matematikus is hasznosnak fogja találni *kutatómunkájához* egy ilyen program megismerését, mert a segítség-

gével fölvetődő munkahipotézisei sok esetben sokkal gyorsabban ellenőrizhetők, mint papíron, ceruzával.

Szinte nyilvánvaló, hogy a matematika *oktatásában* egy ilyen programcsomag jól használható. Sokkal kevésbé nyilvánvaló az, hogy hogyan. A matematika oktatásánál általános elv lehet, hogy valamely terület alapfogalmait a hagyományos módon érdemes elsajátíttatni (eközben legfeljebb a tanár használja a programcsomagot illusztrálás céljából), majd a következő területnél a már megtanult részhez tartozó számításokat a hallgató is végezheti számítógéppel. Például a lineáris algebrai alapok megfelelő elsajátítása és begyakorlása után már sokkal hatékonyabban tudunk a differenciálegyenletekre vagy a statisztikára koncentrálni, ha a sajátértékeket és sajátvektorokat nem kézzel számoljuk.

A matematika oktatásának két szélsőséges álláspontja — sarkított megfogalmazásban — az élményszerzést, illetve a pontosságot tartja a legfontosabbnak. Örvendetes, hogy a *Mathematica* mindkét álláspont képviselőinek pozitív érvekkel szolgálhat: módot ad arra, hogy akár a tiszta, akár az alkalmazott matematika területén a tanuló a megszokottnál jóval több példával ismerkedhessék meg (anélkül, hogy beleveszne az unalmas rutinmunkába), másrészt lehetővé teszi, hogy a matematikában megszokott legszigorúbb (esetenként azon túlmenő) pontosságot alkalmazzunk.

• Felépítés

A könyv *felépítése* a következő: Először általános áttekintést adunk a matematikai programcsomagokról, majd a *Mathematicáról*. Ez utóbbi fejezet 2.3. szakasza ismerteti a *Mathematica* konstrukciós alapelveit; ehhez a nehezebb részhez a későbbiekben többször érdemes visszatérni, sőt: bocsánatos bűnnek tartjuk, ha a türelmetlen Olvasó első alkalommal nem olvassa végig ezt a szakaszt, hanem sietve rátér a 3. fejezet őt érdeklő szakaszára. A könyv gerincét ugyanis a 3. fejezet képezi, amely a matematika néhány fontos területét tárgyalja, abból a szempontból, hogy az adott terület feladatainak megoldása hogyan tehető könnyebbé a program felhasználásával. Mielőtt azonban az Olvasó rátér az analízisről vagy a számelmületről szóló szakasz olvasására, valószínűleg helyesen teszi, ha a 3.1.3–3.1.5. pontot, a 3.2. szakaszt (és esetleg a 3.3.-at is) áttanulmányozza. A programozás iránt érdeklődő Olvasó számára nyilván nem a 3. fejezet valamelyik szakasza, hanem a 4. fejezet nyújt némi (rendkívül vázlatos) tájékoztatást. Azt gondoljuk, hogy — feladattól függően — majdnem mindenki hasznosíthatja majd az 5. fejezet valamelyik részét. Végül a hivatkozások és kulcsszavak jegyzékét abban a reményben állítottuk össze, hogy ezzel minden Olvasó számára könnyebben kezelhetővé tesszük a könyvet.

Az egyes részeknél közölt gyakorlatok és feladatok nehézségi szintje és száma változó. Ezen a helyzeten talán egy később összeállítandó példatár fog majd segíteni. Úgy véljük azonban, hogy a legtöbb Olvasó rendelkezik számos saját problémával, és éppen azok megoldásához keres hatékony eszközt.

Az Olvasó munkáját megkönnyítheti az, hogy a könyv példáit elhelyeztük a MathSource-on (lásd a 2.5.1. pontot). Létezik viszont egy különleges funkciójú ingyenes kiegészítő program is ugyanott (0204–972), a MathReader, amellyel a *Mathematica* által írott állományok elolvashatók. Reméljük, hogy példáink és a MathReader együttesen teljes és gyors áttekintést adnak a *Mathematica* lehetőségeiről annak az Olvasónak, aki még nem rendelkezik a programcsomaggal.

• Jelölések

| | |
|---|--|
| $:=$ | definiáló egyenlőség |
| $A \subset B$ | az A halmaz (nem feltétlenül valódi) részhalmaza a B halmaznak |
| \mathbf{N} | a pozitív egész számok halmaza |
| \mathbf{Z} | az egész számok halmaza |
| \mathbf{Z}_p | Adott p prímszám esetén az egész számok halmazának mod p maradékosztályai által meghatározott test |
| \mathbf{Q} | a racionális számok halmaza |
| \mathbf{R} | a valós számok halmaza |
| \mathbf{C} | a komplex számok halmaza |
| $\mathbf{C}^{m \times n}$ ($m, n \in \mathbf{N}$) | az $m \times n$ -es komplex értékű mátrixok halmaza |
| $f : A \rightarrow B$ | az A halmazon értelmezett B halmazbeli értékeket felvevő függvény |

• Köszönetnyilvánítás

A *Mathematica* programmal való ismerkedés és a könyv megírása közben számos ötletet és hasznosítható bíráló megjegyzést, valamint biztató támogatást kaptunk kollégáinktól és tanítványainktól az Eötvös Loránd Tudományegyetemen és a Gödöllői Agrártudományi Egyetemen.

A program használata közben felmerült kérdéseinkkel elsősorban Warren Boont, a Wolfram Research Inc. (röviden: WRI) hivatásos európai tanácsadóját bombáztuk, a felfedezett vélt és valóságos hibák miatt őt vontuk állandóan felelősségre. Válaszaival nagyban hozzájárult ahhoz, hogy könyvünk hasznosabb, informatívabb legyen.

A könyv írását részben az MKM 419. és 3306. számú pályázatának keretében végeztük.

Pelikán József és Ván Péter lektorként matematikai, nyelvi, számítástechnikai és alkalmazási szempontokat egyaránt figyelembe véve, rendkívül alaposan végezte munkáját. Javasataikat és megjegyzéseiket igyekeztünk az Olvasó javára hasznosítani.

Végül pedig megkérjük a tisztelt Olvasót, ha bármilyen hibát talál, vagy bármilyen hasznosítható megjegyzése van, juttassa el azt a szerzőkhöz vagy a kiadóhoz.

Budapest, 1996. május

Szili László

ELTE TTK
Numerikus Analízis Tanszék
Budapest, Múzeum krt 6–8.
1088
szili@ludens.elte.hu

Tóth János

GATE MGK
Számítástechnikai Tanszék
Gödöllő, Páter K. u. 1.
2103
tothj@mszi.gau.hu